This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Gen Pet.-70

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot et S. C. Snellen van Vollenhoven.

TOME XIII.

HAARLEM,

LES HÉRITIERS LOOSJES.

1878.

32

TABLE DES MATIÈRES.

Programme de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem pour l'année 1878 ..... Pag. I—VIII.
P. M. HERINGA, Considérations sur la théorie des phénomènes capillaires ..... " 1.
P. BLEEKER, Quatrième mémoire sur la faune ichthyologique de la Nouvelle-Guinée ..... " 35.
G. J. MICHAËLIS, Sur quelques cas de mouvement dans un fluide incompressible ..... " 67.
F. C. DONDERS, La détermination numérique du pouvoir de distinguer les couleurs ..... " 91.
F. C. DONDERS, Une lunette pancratique ..... " 99.
J. A. C. OUDEMANS, Théorie de la lunette pancratique de M. Donders. " 110.
J. BOSSCHA, Sur des lunettes à grossissement variable ..... " 141.
J. A C. OUDEMANS, Sur la détermination des distances focales des lentilles à court foyer ..... " 149.
FR. KESSEL, Sur une synthèse d'éthers éthyliques bromés ..... " 173.
G. F. W. BAEHR, Note sur l'attraction ..... " 197.
J. P. VAN DER STOK, Sur les variations de la déclinaison magnétique en Néerlande, déduites de vingt années d'observations au Helder. " 213.
J. BOSSCHA, Sur l'intensité des courants électriques du téléphone de Graham Bell ..... " 247.
A. HEYNSIUS, Sur l'albumine du sérum et de l'œuf et sur ses combinaisons ..... " 257.
TH. W. ENGELMANN, Études comparées sur l'action électrique des muscles et des nerfs ..... " 305.
HUGO DE VRIES, Sur la perméabilité des membranes précipitées.... " 344.
A. C. OUDEMANS JR., Recherches sur la quinamine ..... " 356.

D. Bierens de Haan, Notice sur les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}$ et $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}$, où F est une fonction goniométrique... " 389.

T. C. Winkler, Sur l'origine des dunes maritimes des Pays-Bas.. " 418.

Th. W. Engelmann, Sur l'influence du sang et des nerfs sur le pouvoir électromoteur des sections transversales artificielles des muscles..... " 429.

Th. W. Engelmann, Nouvelles recherches sur les phénomènes microscopiques de la contraction musculaire..... " 437.

F. Seelheim, Sur des tourbières d'eau saumâtre..... " 466.

H. C. Dibbits, Sur la décomposition du chlorure de calcium par l'eau. " 478.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

CONSIDÉRATIONS
SUR LA
THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES,

PAR

P. M. HERINGA.

RADCLIFFE LIBRARY
28 JUN 78

I.

La théorie des phénomènes capillaires est due surtout aux travaux de trois mathématiciens illustres, Laplace, Gauss et Poisson. Lorsque de tels hommes arrivent à un résultat presque identique, on ne peut guère refuser à ce résultat un grand degré de probabilité, et il semblera peut-être téméraire de venir en contester l'exactitude. Pourtant, je vais essayer d'exposer les objections que cette théorie soulève, à mon avis.

C'est l'explication d'une expérience de M. Plateau [1]) qui m'a conduit à m'occuper de ce sujet.

M. Plateau fit cette expérience pour montrer la pression que la couche superficielle d'un liquide exerce sur la masse. Dans une sphère d'huile, suspendue au milieu d'un vase plein d'alcool, il introduit un mince disque de fer, fixé à une tige déliée. La fig. 1 (Pl. I) représente ce disque; au centre il y a une

[1]) *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, t. I, § 18.

ouverture; le diamètre de la sphère est plus petit que celui du disque. Le disque est engagé dans la sphère de telle sorte que le centre de la sphère ne tombe pas sur le disque. Après que celui-ci a été introduit, l'huile s'étale sur les deux faces du disque, de manière à former deux segments sphériques inégaux. Ensuite, une partie de l'huile passe, à travers l'ouverture du disque, du grand segment vers le petit, jusqu'à ce que les deux segments soient devenus égaux, moment où l'équilibre est réalisé.

D'après M. Plateau, ou plutôt d'après la théorie généralement admise, ce phénomène s'explique de la manière suivante. Par suite de l'attraction du disque, l'huile s'étend sur toute la surface de celui-ci, de sorte que le contour des segments vient s'appuyer sur le contour du disque. Ce point atteint, un mouvement ultérieur ne peut se produire que par l'action de la partie libre de la couche superficielle; dans le grand segment, en effet, le rayon de courbure est plus petit, donc $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ est plus grand; par conséquent, la pression qu'exerce la couche superficielle du grand segment est plus forte que la pression déterminée par la couche superficielle de l'autre segment. Prenons maintenant, pour plus de clarté, un exemple particulier.

Soit fig. (2) une section du disque et des segments avant qu'ils aient subi aucune altération. Désignons le rayon d'un des segments par a et celui de l'autre par a'; supposons que le centre du premier segment coïncide avec le centre P du disque; ce segment est donc une demi-sphère. Le centre du second segment est supposé placé à droite de P, à une distance égale à $\frac{4}{5}a'$. Appelons ces deux segments B et A. Le centre de gravité de B se trouve alors à la distance $\frac{3}{8}a$ à droite de P, et le centre de gravité de A à la distance $\frac{19}{280}a'$ à gauche de P [1]). Comme

[1]) Voir, entre autres, Jullien, *Problèmes de mécanique rationnelle*, t. I, p. 12.

on a $PC = a$ et aussi $PC = \frac{3}{5} a'$, il s'ensuit $a' = \frac{5}{3} a$ et par conséquent $\frac{19}{280} a' = \frac{19}{168} a$. Si l'on calcule maintenant le centre de gravité commun des deux masses, en négligeant l'épaisseur du disque, on trouve qu'il est situé à une distance $= 0{,}274\, a$ à droite de P. Par la seule action moléculaire du liquide, le centre de gravité de la masse serait donc déplacé de la quantité $0{,}274\, a$; car, dans l'état d'équilibre, le centre de gravité se trouve évidemment en P. Mais il est impossible que le centre de gravité se déplace par l'effet de l'action moléculaire de la masse elle-même. Nous sommes donc ici en présence d'une erreur, erreur qui doit être cherchée dans la théorie elle-même, puisque l'explication de l'expérience mentionnée repose entièrement sur cette théorie.

M. Jamin donne, dans son *Cours de physique* [1]), un résumé succinct mais très clair de la théorie. Je vais le transcrire ici, afin de mieux faire voir où réside, selon moi, l'erreur en question.

„Concevons une masse liquide terminée par une surface quelconque XY (fig. 3), et étudions en particulier l'action exercée sur une molécule M placée sur cette surface; cette molécule sera attirée par toute la portion du liquide contenue dans une demi-sphère décrite du point M comme centre avec le rayon de l'attraction sensible, ce qui produira une résultante unique P, normale à la surface. Si la molécule considérée est dans l'intérieur, en M', la portion active du liquide est contenue dans ABC, que l'on peut décomposer en trois parties par trois plans équidistants AB, PQ, A'B', parallèles à la surface AB. L'attraction exercée par ABPQ est détruite par PQA'B', et tout se passe comme si la molécule n'était sollicitée que par le liquide A'B'C, ce qui donnera une force P' encore normale à la surface, mais moindre que P. Enfin, quand la molécule sera placée en M'', à une profondeur plus grande, elle sera

[1]) Tome I, p. 213.

sollicitée également dans tous les sens par des forces qui se détruiront.

„Si donc nous décrivons une surface X′Y′ qui soit en tous ses points à une distance de XY égale au rayon de l'attraction sensible, et si nous considérons les molécules comprises entre XY et X′Y′, nous voyons qu'elles sont toutes soumises à des forces qui agissent normalement de l'extérieur à l'intérieur, forces qu'on peut comparer à celles de la pesanteur, qui agissent aussi sur chaque molécule. Or, l'effet de ces dernières est de produire des pressions qui croissent avec la profondeur, qui se transmettent de haut en bas et qui augmentent à mesure qu'on s'éloigne de la surface. Par conséquent, l'effet des forces moléculaires devra être analogue. La différence entre les deux cas consiste en ce que les forces de la pesanteur sont constantes, tandis que l'action attractive exercée sur chaque molécule est variable; elle est maxima sur XY, et elle diminue jusqu'à devenir nulle quand la profondeur augmente jusqu'à X′Y′. D'où il résulte que *toutes les forces moléculaires feront naître une pression croissante de* XY *à* X′Y′, *et qui se transmettra dans toutes les parties du liquide. On la nomme pression moléculaire.*"

M. Jamin explique ensuite l'influence de la courbure des surfaces. On arrive ainsi à la formule connue

$$K \pm H\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

où K est la pression moléculaire quand la surface est plane, H la pression quand les rayons de courbure de la surface sont égaux à l'unité. On prend le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que la surface est convexe ou concave.

Dans le raisonnement qui précède, il s'est glissé toutefois une assomption gratuite. On a commencé, en effet, par comparer les forces moléculaires à la force de la pesanteur, puis, de cette comparaison, on a tiré la conséquence que la pression, due aux forces moléculaires, se transmettra, tout comme la pression pro-

duite par la pesanteur, dans la masse entière du liquide [1]). Or, tel n'est pas du tout le cas, me semble-t-il. Supposons que dans la fig. (3) on ait encore décrit une troisième surface X″ Y″, à une distance au-dessus de XY égale au rayon de l'attraction sensible; la masse comprise entre XY et X′Y′ attire alors la masse comprise entre X′Y′ et X″Y″, et réciproquement; mais il n'en résulte aucune pression au-dessus de X″Y″. De même, deux plaques de verre peuvent s'attirer, mais jamais on ne sentira la moindre pression au-dessus, au-dessous ou à côté de ces plaques, si elles sont en repos; pourquoi donc l'existence d'une pareille pression a-t-elle été admise dans le cas de deux lames liquides? La terre attire l'eau de la mer contenue dans un des bassins de sa surface, et de là naît une pression sur le fond de ce bassin; mais s'ensuit-il qu'on observera cette pression au-dessus de la mer ou au côté opposé de la terre? Non, certes. Pareillement, l'attraction mutuelle de deux molécules d'eau produira bien une pression entre ces molécules, mais que cette pression se transmette en dehors des molécules elles-mêmes, c'est ce qui ne saurait être admis. On objectera peut-être que la pression se transmet avec la même intensité dans toute la masse liquide; mais cela s'applique seulement aux forces agissant à l'extérieur, telles que la force motrice d'une presse hydraulique et la pesanteur, qui peut aussi être assimilée à une force extérieure. [2])

En apparence, le cas d'une bulle de savon gonflée, qui refoule dans le chalumeau l'air qui a servi à la distendre, constitue un argument en faveur de la pression exercée par la couche super-

---

[1]) Je me figure un vase rempli en partie d'un liquide. Le vase peut être aussi grand qu'on le voudra, mais il doit se trouver au-dessus de la surface de la terre.

[2]) L'idée d'une pression produite dans le liquide par l'action de la couche superficielle se retrouve aussi, exprimée mathématiquement, dans la dissertation de M. van der Waals: *Over de continuïteit van den gas- en den vloeistof-toestand*, (voir pag. 10 et 22). Mais, l'auteur non plus ne donne aucune preuve de la transmission de cette pression. Il la compare à la pression qui doit être exercée pour maintenir un gaz dans un espace déterminé.

ficielle. Il s'agit toutefois ici d'un cas très spécial de masse liquide, sur lequel je reviendrai plus loin.

Si nous considérons maintenant les théories mathématiques de Laplace, de Gauss et de Poisson, nous trouverons, là aussi, beaucoup à reprendre.

Un examen détaillé de toutes les théories proposées jusqu'ici a été fait par M. E. Bède, dans ses *Recherches sur la capillarité*, insérées aux *Mémoires couronnés et des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique*, années 1861, 1863, 1865 et 1867. Le but de l'auteur a été surtout de comparer les résultats théoriques avec les phénomènes eux-mêmes. Dans la première partie il donne un aperçu des différentes théories. Bien que lui aussi y trouve des points faibles, il n'essaie pas de les corriger. C'est surtout la théorie de Poisson qui lui fournit matière à critique. A la fin de son exposé il dit entre autres: „Ou je m'abuse complétement sur la portée des arguments de Poisson, ou je crois pouvoir affirmer que cet illustre géomètre, aveuglé par une idée préconçue, s'est égaré dans une inutile complication de la question."

M. Bède, du reste, paraît aussi admettre l'influence de la couche limitante; du moins, il ne s'en déclare point l'adversaire.

Or, c'est précisément contre cette influence miraculeuse de la couche superficielle que sont dirigées les pages suivantes. Renvoyant donc pour l'histoire des théories au Mémoire de M. Bède, je vais signaler successivement, dans les trois principales de ces théories, les erreurs fondamentales que je crois y découvrir.

En 1806 et 1807 parut le tome quatrième de la *Mécanique céleste* de Laplace; l'auteur y donnait deux théories des phénomènes capillaires.

Il commence par combattre l'opinion de Clairaut concernant la distance à laquelle se fait sentir l'action capillaire. Clairaut pensait que l'influence du tube est sensible jusqu'à la petite colonne de liquide qui se trouve autour de l'axe du tube. Laplace, au contraire, admet que l'influence ne s'étend qu'à une distance insensible. L'expression „distance insensible" joue un grand rôle

dans ces théories; c'est pourtant une expression malheureuse, qui se distingue par son ambiguïté. Car qu'entend-on ici par distance insensible? Insensible pour qui ou pour quoi, pour l'œil humain ou pour un bon microscope? Laplace ne donne aucune explication à ce sujet. En tout cas, cette distance est une longueur déterminée, et par conséquent on ne peut employer pour elle l'expression d'infiniment petite, à laquelle n'est pas attachée la notion de grandeur déterminée.

Dès le début de l'exposé de la théorie, nous avons l'occasion de remarquer le vague de cette expression. Laplace, en effet, donne d'abord un aperçu des résultats qu'il a obtenus. Après avoir mentionné l'influence reconnue à la courbure de la surface, il dit être arrivé à la similitude des segments sphériques que la surface du liquide forme dans des tubes très étroits; de la similitude des segments sphériques découle alors, comme conséquence directe, la constance de l'angle sous lequel la surface du liquide rencontre la surface de la matière solide. Car deux segments sphériques sont semblables lorsque les rayons de leurs bases sont proportionnels à leurs hauteurs, ou aux rayons des sphères auxquelles ils appartiennent. C'est en vain, toutefois, qu'on cherche dans le Mémoire la preuve de la similitude des segments; tout repose sur la démonstration, un peu étrange, de l'invariabilité de l'angle de raccordement des deux surfaces. Laplace dit, en effet, que si l'on regarde le tube au microscope, le diamètre paraît avoir une longueur de plusieurs mètres; et en admettant que la distance de l'attraction sensible soit alors devenue égale à un millimètre, on peut regarder la surface du tube, en un point quelconque, comme plane. A quoi sert ici le microscope, c'est ce qu'on ne voit pas clairement; car le rapport des deux grandeurs en question reste naturellement le même. En outre, si Laplace élimine ainsi l'influence de la courbure du tube, on peut de la même manière éliminer l'influence de la courbure du liquide, puisque la surface du liquide pourrait alors être regardée toujours, en un point quelconque, comme plane par rapport au rayon d'activité.

Voyons maintenant comment Laplace parvient à la formule fondamentale de l'action capillaire.

Il considère, à cet effet, un vase ABCD (fig. 4) rempli d'eau jusqu'en AB, et dans lequel plonge un tube de verre NMEF ouvert aux deux extrémités; l'eau s'élève jusqu'en O et sa surface prend la figure concave NOM. Le point le plus bas de cette surface est en O. D'après Laplace, l'action que le liquide placé au-dessous de KOI exerce sur OZ serait la même que celle du vase sur VR; et le ménisque MIOKN agirait de bas en haut sur la colonne OZ, de manière à soulever le liquide. Mais l'action exercée sur OZ par le liquide ambiant, et celle du vase sur VR ne sont pas comparables; car la première est nulle, suivant Laplace, et la seconde ne l'est pas, lorsqu'on fait par exemple coïncider VR avec AD; en outre, ne doit-on pas se demander immédiatement pourquoi l'action du ménisque sur OZ n'est pas détruite par l'action de OZ sur le ménisque?

Par ce raisonnement sommaire, qui ne prouve rien, Laplace est donc amené à regarder la force soulevante du ménisque comme la cause de l'ascension du liquide. Pour calculer l'influence de la forme du ménisque, il détermine, de la manière suivante, l'action qu'une sphère exerce sur une colonne liquide reposant normalement sur la surface extérieure de la sphère. Soient r la distance du centre de la sphère à un point de la colonne attirée, u le rayon d'un feuillet sphérique dont du est l'épaisseur, ϑ l'angle que le rayon u fait avec la droite r, et ω l'angle que le plan mené par les deux droites r et u fait avec un plan fixe passant par la droite r; l'élément du feuillet sphérique est alors $= u^2\, du\, d\omega\, d\vartheta \sin\vartheta$. Si f désigne la distance de cet élément au point attiré, nous avons aussi

$$f^2 = r^2 - 2\, r\, u \cos\vartheta + u^2.$$

Supposons, en outre, que la loi de l'attraction à la distance f soit représentée par la fonction $\varphi\,(f)$, dont la valeur devient insensible pour une valeur sensible de f; l'action de l'élément

du feuillet sur le point attiré, décomposée suivant r et dirigée vers le centre du feuillet, sera alors

$$u^2\, du\, d\omega\, d\vartheta \sin\vartheta \frac{r - u\cos\vartheta}{f}\, \varphi(f) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Mais on a $\frac{r - u\cos\vartheta}{f} = \frac{df}{dr}$, de sorte que (1) devient

$$u^2\, du\, d\omega\, d\vartheta \sin\vartheta \frac{df}{dr}\, \varphi(f) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Soit maintenant $c - \chi(f)$ l'intégrale $\int df\, \varphi(f)$, prise à partir de $f = 0$; c est la valeur de l'intégrale pour $f = \infty$; $\chi(f)$ est une grandeur positive, qui décroît rapidement à mesure que f augmente, et devient insensible pour une valeur appréciable de f; l'expression (2) est donc la différentielle partielle de

$$u^2\, du\, d\omega\, d\vartheta \sin\vartheta\, \{c - \chi(f)\},$$

et par conséquent aussi la différentielle partielle de

$$-u^2\, du\, d\omega\, d\vartheta \sin\vartheta\, \chi(f); \ldots\ldots\ldots (3)$$

celle-ci, intégrée de $\omega = 0$ à $\omega = 2\pi$, donne

$$-2\pi u^2\, du\, d\vartheta \sin\vartheta\, \chi(f).$$

Il faut ensuite intégrer de $\vartheta = 0$ à $\vartheta = \pi$. En différentiant la valeur de f^2 par rapport à ϑ, on a

$$d\vartheta \sin\vartheta = \frac{f\, df}{r\, u}, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

par conséquent

$$-2\pi u^2\, du \int d\vartheta \sin\vartheta\, \chi(f) = -2\pi \frac{u\, du}{r} \int f\, df\, \chi(f).$$

Posons maintenant de nouveau l'intégrale $\int f\, df\, \chi(f) = c' - \psi(f)$; c' est la valeur de l'intégrale quand f est infiniment grande; $\psi(f)$ est de nouveau une grandeur positive, qui diminue très rapidement lorsque f augmente. En remarquant que pour les

valeurs $\vartheta = 0$ et $\vartheta = \pi$ on a $f = r - u$ et $f = r + u$, nous obtenons alors

$$-2\pi u^2 du \int d\vartheta n u \vartheta \chi(f) = -\frac{2\pi u du}{r} \{\psi(r-u) - \psi(r+u)\} \quad . \quad . \quad (5)$$

Si l'on différentie cette fonction de r, le coefficient de dr donnera l'attraction du feuillet sphérique sur le point attiré; mais si l'on veut avoir l'action du feuillet sur une colonne liquide dont l'extrémité la plus rapprochée soit à une distance b du centre de la sphère, il faut multiplier ce coefficient par dr et prendre l'intégrale du produit; cette intégration fournit de nouveau la fonction précédente, à laquelle doit être ajoutée une constante, qu'on détermine en faisant commencer l'intégrale à $r = b$. On obtient ainsi pour cette intégrale

$$\frac{2\pi u du}{b} \{\psi(b-u) - \psi(b+u)\} - \frac{2\pi u du}{b} \{\psi(r-u) - \psi(r+u)\} \quad . \quad (6)$$

Or $\psi(b + u)$ est toujours une grandeur insensible, puisque b a une valeur sensible; et si nous supposons que r, la distance de l'extrémité la plus éloignée de la colonne, surpasse b d'une quantité sensible, $\psi(r - u)$ et $\psi(r + u)$ sont aussi des grandeurs insensibles, de sorte que la fonction ci-dessus se réduit à $\frac{2\pi u du}{b} \psi(b - u)$.

Telle est l'expression de l'action du feuillet sur un canal infiniment étroit, dirigé suivant r, et dont l'extrémité la plus rapprochée est à la distance b du centre.

Cette action est la pression que le liquide exercerait, par suite de l'attraction du feuillet, sur une base plane, placée à l'extrémité du canal et perpendiculaire à sa direction, cette base étant prise pour unité. Pour obtenir l'action de la sphère entière, dont le rayon est b, posons $b - u = z$; cette action sera égale à l'intégrale

$$2\pi \int \frac{b-z}{b} dz\, \psi(z) \text{ prise depuis } z = 0 \text{ jusqu'à } z = b.$$

En désignant par K l'intégrale $2\pi \int dz\, \psi(z)$ et par H l'intégrale $2\pi \int z\, dz\, \psi(z)$, on aura donc pour l'attraction

$$K - \frac{H}{b}.$$

Telle est, exactement, l'intégration donnée par Laplace.

Gauss [1]) a toutefois fait remarquer que la propriété de $\varphi(f)$, de tendre vers 0 pour $f = \infty$, ne passe pas toujours à $\psi(f)$ et à $\chi(f)$.

M. Bède [2]) en donne l'exemple suivant. La fonction $l\left(1 + \frac{a}{a+r}\right)$, dans laquelle a est une grandeur insensible, satisfait aux conditions de la fonction $\varphi(r)$. Pour $r = 0$ elle a une valeur finie $l = 2$; elle décroît rapidement quand r augmente, et pour $r = \infty$ elle est 0. Or, si l'on calcule $\chi(r)$, on a

$$\chi(r) = c + r\, l\left(1 + \frac{a}{a+r}\right) + a\, l\, \frac{(2a+r)^2}{a+r}, \text{ ou, pour } r = 0,$$

$$\chi(0) = c + a\, l\,(4\,a),$$

ou

$$\chi(r) - \chi(0) = r\, l\left(1 + \frac{a}{a+r}\right) + a\, l\, \frac{(2a+r)^2}{4\,a\,(a+r)}.$$

Il est facile de voir que $\chi(r) - \chi(0)$ devient ∞ pour $r = \infty$, et par conséquent ne satisfait pas à la condition. Gauss pense qu'on peut éviter cette difficulté en intégrant jusqu'à une distance finie. M. Bède, toutefois, ne trouve pas cette restriction suffisante, et regarde comme plus sûr de n'étendre l'intégration que jusqu'au rayon d'activité.

Ainsi, en premier lieu, l'assertion que c'est le ménisque qui détermine l'ascension, repose sur des fondements très faibles; et, en second lieu, le calcul de la force attractive n'est pas à

---

[1]) *Principia generalia*, p. 2.

[2]) Bède, *l. c.*, p. 48.

l'abri de reproche. On ne peut donc tirer de cette théorie la preuve concluante de la pression qui se produirait à la surface du liquide; car il reste encore maintenant à rendre pratique le résultat que Laplace vient de trouver; c'est-à-dire, à l'appliquer au cas où la colonne liquide se trouve à l'intérieur de la sphère.

Pour cela, voici comment Laplace s'y prend. Lorsque le rayon de la sphère devient infiniment grand, on a $\frac{H}{b} = 0$; K est alors la force attractive entre une masse liquide à surface plane et une colonne liquide normale à cette surface; $\frac{H}{b}$ est donc l'action du ménisque, toujours pour le cas où la colonne liquide est extérieure à la masse.

Figurons-nous maintenant (fig. 5) deux sphères égales, qui se touchent en O. Soit IOK un plan tangent aux deux sphères, et OS la colonne liquide. Le point q du ménisque inférieur agit sur la colonne OS, pour la soulever. En effet, si l'on construit le triangle isoscèle Oqr, on voit que les actions du point q sur la portion Or de la colonne se neutralisent, tandis que par son action sur rs ce point tend à soulever le liquide, tout comme le fait un point q', placé de la même manière dans le ménisque supérieur IOMNK.

Les deux ménisques agissent donc avec la même force pour élever le liquide de la colonne; tous les deux, par conséquent, avec la force $\frac{H}{b}$.

Or, l'action qu'une masse indéfinie, placée au-dessus de OS et limitée par le plan IOK, exerce sur la colonne OS, est la même que celle d'une masse indéfinie placée au-dessous de ce plan; un point quelconque de la colonne est en effet attiré par les deux masses avec la même intensité, mais dans des directions opposées, puisqu'il reste en équilibre entre ces deux attractions. Si K exprime l'action de la masse supérieure, K exprime donc aussi l'action exercée sur cette même colonne, de haut en bas, par la masse inférieure. Mais cette action se compose de deux

parties, savoir, celle d'une sphère Q O P et celle du ménisque I O Q P K; nommant donc S l'action de la sphère, et remarquant que le ménisque sollicite la colonne de bas en haut, avec une force égale à $\frac{H}{b}$, on a

$$S - \frac{H}{b} = K, \text{ ou } S = K + \frac{H}{b},$$

d'où il suit que l'action d'un corps limité par une surface sphérique, sur une colonne liquide intérieure, est exprimée par $K + \frac{H}{b}$. En partant de ce résultat, Laplace arrive ensuite, par la considération d'un ellipsoïde osculateur, à la formule connue de la pression à la surface d'un liquide, suivant que cette surface est convexe ou concave:

$$N \pm \tfrac{1}{2} H \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

En vertu de la pression ainsi augmentée ou réduite, le liquide serait alors déprimé ou soulevé.

Ce raisonnement de Laplace, que nous avons reproduit sans y rien changer, offre le grand défaut de ne pas indiquer jusqu'où s'étend la petite colonne liquide qu'on considère. Dans le cas précédent, où cette colonne était supposée extérieure à la sphère, sa grandeur importait peu, puisque l'attraction ne s'exerce que jusqu'à une très petite distance. Mais dans le cas traité en dernier lieu, il est facile de voir que la longueur de la colonne doit être précisée. Si nous admettons, par exemple, qu'elle s'étende aussi loin que le liquide lui-même, nous arrivons à un résultat tout différent. Observons d'abord que tout ce qui se trouve en dehors de la sphère appartient au ménisque. Menons maintenant le plan K′ O′ I′, parallèle à K O I et tangent à la sphère au point O′; l'action de la partie du ménisque comprise entre les deux plans est alors, sur la colonne O O′, $= 0$, et sur la colonne au-dessous de K′O′I′, $= \frac{H}{b}$, de bas en haut; l'action de la partie

du ménisque située au-dessous de K'O'I' est, sur la colonne OO', $= -K$, et sur la colonne au-dessous de K'O'I', évidemment nulle. L'action de la sphère POQO' sur OO' est nulle aussi et l'action de la sphère sur la colonne au-dessous de K'O'I' est évidemment $K - \frac{H}{b}$, de bas en haut; l'action exercée sur la colonne par la masse liquide totale située au-dessous de KOI est donc, de bas en haut, $K - \frac{H}{b} + \frac{H}{b} - K$, ou $= 0$.

Il ne pouvait d'ailleurs en être autrement, du moins si nous supposons que les surfaces supérieure et inférieure de la masse liquide soient parallèles; dans ce cas, en effet, la colonne est attirée avec la même force vers le haut et vers le bas.

Laplace a donc eu tort de prétendre que l'action de la masse située au-dessus de KOI était la même que celle de la masse située au-dessous de KOI. Mais si nous prenons maintenant la colonne $=$ OO', il est clair que l'action du liquide inférieur à I'O'K' est la même que celle du liquide supérieur à IOK, mais de sens opposé; d'un autre côté, l'action de la sphère et du ménisque compris entre les deux plans KOI et K'O'I' est alors $= 0$; donc, l'attraction de la masse entière au-dessous de KOI et de K'O'I' est $= 0$, et par conséquent l'attraction de la masse entière au-dessous de KOI, sur la petite colonne, $= K$. On voit par là combien il est nécessaire de déterminer jusqu'où doit s'étendre la colonne liquide.

Enfin, quand même la pression serait telle que Laplace le pense, il ne s'ensuivrait pas encore qu'elle doive se transmettre dans toute la masse liquide; cette transmission est simplement admise, sans preuve aucune.

La même détermination de la pression exercée sur une colonne liquide intérieure se retrouve dans la Dissertation déjà citée de M. van der Waals, troisième chapitre, *Expression analytique de la pression moléculaire*; nos remarques sont donc aussi entièrement applicables à ce travail. M. van der Waals indique nettement les limites de l'intégration, ce qui nous permet de relever

encore une autre erreur. Il obtient, en effet, cette intégrale:

$$2\pi d^2 \int_0^b \psi(z)\,dz - \frac{2\pi d^2}{b} \int_0^b z\,dz\,\psi(z),$$

et il dit alors qu'on peut faire croître les limites indéfiniment sans qu'il en résulte aucun changement. Or cela est inexact, car quand on a $z = b - u$, b étant le rayon de la sphère attirante et u le rayon du feuillet, z devient plus grand à mesure que u diminue, jusqu'à $u = 0$; si ensuite on laisse u devenir négatif, on obtient dans l'intégrale des parties doubles, que cette intégrale n'admet pas. Laisse-t-on au contraire croître b indéfiniment, le rayon devient infiniment grand et par conséquent la surface de la sphère devient plane; l'intégration d'une surface sphérique et d'une surface plane serait donc alors une seule et même chose. On voit qu'en étendant ainsi les limites on arriverait à des absurdités.

Je n'en dirai pas davantage de la théorie de Laplace; ce qui précède suffit pour montrer qu'elle est établie sur des bases trop fragiles. Quiconque examinera attentivement l'ensemble de cette théorie, comme aussi de la seconde, en reconnaîtra aisément l'incohérence et devra souscrire au jugement porté sur elle par Gauss, dans la préface de ses „*Principia generalia*":

His perpensis fateri oportet, theoriam ab ill. Laplace *propositam etiamnum essentialiter mancam et incompletam esse.*

Au sujet de la théorie de Gauss, je serai très bref.

Gauss cherche à déterminer, à l'aide du principe des déplacements apparents, l'équilibre d'un liquide qui est en contact avec un solide. Les forces qui agissent sur le liquide sont, d'après Gauss, la pesanteur, l'attraction mutuelle des molécules liquides et l'attraction des molécules de la matière solide sur les molécules du liquide. C'est de ces trois forces que Gauss détermine l'équilibre.

Mais il a voulu donner en même temps, dans son Mémoire, un exemple de la variation des intégrales multiples, et cela a rendu l'exposition de sa théorie plus compliquée qu'elle n'eût pu l'être.

Aussi est-ce surtout pour présenter les choses d'une manière plus simple, que M. J. Bertrand a publié son Mémoire: *Sur la théorie des phénomènes capillaires* [1]).

Soient donc m, m', m'', ... les molécules du liquide qui s'attirent mutuellement suivant une fonction de leur distance et en raison directe du produit de leurs masses. Supposons ce liquide contenu dans un tube solide, dont les molécules seront désignées par M, M', M''.... Celles-ci attirent m, m', m''.... suivant une fonction différente de la première. Représentons les distances par (m, m') et (m, M); les forces qui sollicitent m, m', m''.... devront se faire équilibre entre elles, et, d'après le principe des déplacements apparents, nous aurons donc

$$0 = \Sigma m \{ -gdz - m'f(m, m')\, d(m, m') - m''f(m, m'')\, d(m, m'') \ldots$$
$$\ldots - M\,F(m, M)\, d(m, M) - M'\,F(m, M')\, d(m, M') \},$$

où $d(m, m')$ et $d(m, M)$ ont seulement rapport au déplacement de m.

Cette équation est le point de départ de toute la théorie de Gauss. La manière dont il la développe est très intéressante à étudier et, à mon avis, parfaitement correcte. Si Gauss s'est trompé, ce n'a donc pu être que dans l'établissement de cette équation. Voyons donc jusqu'à quel point celle-ci est exacte.

Remarquons d'abord que Gauss admet l'incompressibilité du liquide. Quelle que soit la force avec laquelle les molécules s'attirent, leurs distances respectives ne changent donc pas. Soit qu'on se figure les molécules du liquide appuyées directement sur les parois du tube, soit qu'on les suppose maintenues à une certaine distance, toujours la force qui sollicite m vers M fera naître une force opposée, qui empêchera m de céder à cette attraction.

Représentons-nous, pour plus de simplicité, une plaque de verre sur laquelle se trouve une molécule liquide; cette molécule est pressée contre la plaque par la force $F(m, M)$, mais, de cette action même, résulte aussi une force dirigée en sens con-

[1]) *Journal de Liouville*, t. XIII, 1848, p. 185.

traire. Or, dans le travail de Gauss il n'est pas question de cette force; les termes qui en proviennent doivent donc être introduits dans l'équation. Tout comme dans l'hydrostatique, on doit tenir compte de la réaction passive. Lorsqu'il s'agit de déterminer l'équilibre d'un parallélipipède liquide, nous voyons la pression, due à la pesanteur, compensée sur la face supérieure $p\,dx\,dy$ par $Z\,dm$ et par la réaction passive $-\left(p + \left(\frac{dp\,dz}{dz}\right) dx\,dy\right)$ [1].

Les résultats obtenus par Gauss ne peuvent pas être corrects, puisqu'ils reposent, comme je crois l'avoir montré dans ce qui précède, sur des bases qui elles-mêmes sont défectueuses.

La théorie de Poisson est fondée, au contraire, sur l'hypothèse de la compressibilité du liquide à la surface. Voici comment Poisson se représente la matière [2]). Les corps se composent de molécules distinctes, c'est-à-dire, de particules de matière pondérable, d'une grandeur imperceptible, séparées par des intervalles vides ou pores, dont les dimensions sont également insaisissables pour nos sens.

Indépendamment de la matière pondérable, on suppose que chaque molécule contient, en outre, une certaine quantité de matière impondérable. Poisson appelle celle-ci le calorique.

Toutes les parties de la matière sont soumises à deux sortes d'actions réciproques. L'une de ces actions est une force attractive, indépendante de la nature des corps ou de leurs molécules, proportionnelle au produit des masses et en raison inverse du carré des distances; elle s'étend à l'infini dans l'espace; c'est ce qu'on appelle la gravitation. L'autre force est en partie attractive et en partie répulsive; elle dépend de la nature des molécules et de la quantité du calorique. On attribue la force attractive à la masse pondérable, et la force répulsive au calorique. La différence de ces deux forces est appelée *force moléculaire*. Elle

---

[1]) Voir, entre autres, Sturm, *Cours de mécanique*, n°. 703.

[2]) Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*.
Poisson, *Sur les équations générales* etc. *Journal de l'Ecole polyt.*, 20e cah.
Poisson, *Mémoire sur l'élasticité*. *Mémoires de l'Institut*, t. VIII.

tend à rapprocher ou à éloigner les molécules l'une de l'autre, suivant que l'action de la masse pondérable est plus forte ou plus faible que l'action du calorique. Son intensité diminue très rapidement à mesure que la distance des molécules augmente, et elle devient tout à fait insensible lorsque cette distance a atteint une grandeur appréciable.

La résultante des forces moléculaires, où la répulsion du calorique est ordinairement prépondérante, produit la pression des liquides sur eux-mêmes et sur les corps solides, et la résistance que ces corps opposent au mouvement des liquides.

Tous les phénomènes de la capillarité naissent aussi des forces moléculaires, mais ils dépendent d'une autre partie de la résultante, différente de la pression et dans laquelle au contraire l'attraction a toujours le dessus. Cette partie dépend, d'après Poisson, de la forme du liquide et du changement rapide de la densité à la surface et au voisinage du corps contre lequel s'appuie le liquide.

Poisson explique ce changement de la densité à la surface de la manière suivante. Chaque couche infiniment mince d'un liquide est pressée également des deux côtés par la force répulsive des molécules voisines, diminuée de leur force attractive; ou, ce qui revient au même, on peut regarder cette couche comme appuyée sur le liquide qui se trouve d'un côté et comprimée par le liquide qui est placé de l'autre côté; le degré de compression est déterminé par la grandeur de la force comprimante. A une distance appréciable de la surface du liquide, cette force provient d'une couche adjacente dont l'épaisseur est égale au rayon d'activité du liquide; pour cette raison, la densité à l'intérieur du liquide est constante, abstraction faite de la légère compression résultant de la pesanteur, laquelle varie avec la distance de la surface supérieure. Mais lorsque cette distance est moindre que le rayon d'activité, l'épaisseur de la couche située au-dessus de la couche qu'on considère est pareillement plus petite que ce rayon; la force comprimante, qui provient de cette couche, décroît donc très rapidement avec la distance de la surface et disparaît entièrement à la surface même, où la couche infiniment

mince n'est plus comprimée que par le poids de l'atmosphère.

Bien que la couche superficielle ne soit pressée que par l'atmosphère, il y a pourtant compression, par conséquent tendance à vaincre cette pression, mais il n'y a pas d'attraction.

Tout est clair dans cet exposé, sauf ce qui concerne la force à laquelle est attribuée la capillarité; on ne comprend pas comment celle-ci doit être conçue, pourquoi la capillarité dépend seulement d'une partie de la résultante. Poisson dit qu'il y a deux forces en jeu, une répulsive et une attractive; il se peut que l'une des deux soit prépondérante, mais on n'a pas le droit de ne considérer qu'une partie de la force, lorsqu'on veut déterminer l'état total. Or c'est ce que Poisson a fait, évidemment pour expliquer une chose qui autrement serait inexplicable, comme nous allons le voir.

Voici, en effet, comment Poisson parvient à l'équation d'équilibre d'un liquide.

Il détermine d'abord la force qui agit sur une colonne liquide cylindrique OE (fig. 6), dans la direction du cylindre, de section infiniment petite, qui est perpendiculaire au plan COD tangent en O. La section étant ω, il représente cette action par $N\omega$. N se compose de deux parties; l'une est l'action du liquide situé au-dessus de COD, il la nomme K; l'autre est l'action du liquide situé entre COD et AOB, il la nomme $-\mu$; si $\varphi(r)$ désigne l'attraction entre deux unités de masse à la distance r, et ϱ la densité du liquide, il trouve

$$K = \frac{2\pi\varrho^2}{3}\int_0^\infty r^3\,\varphi(r)\,dr,$$

et $\mu = \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)$, λ et λ' étant les rayons de courbure de la surface et

$$H = \frac{1}{4}\pi\varrho^2\int_0^\infty r^4\,\psi(r)\,dr;$$

par conséquent

$$N = K - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right).$$

Ensuite, Poisson détermine l'équilibre, dans la direction de la pesanteur, des forces qui sollicitent le petit cylindre OO'. Sur ce cylindre presse d'abord l'air, avec une force $+P$; en second lieu la pesanteur $+g\varrho\alpha$, α étant la longueur OO'; en troisième lieu la force moléculaire du liquide placé entre COD et AOB, $= -\mu$; enfin la force moléculaire du liquide situé au-dessous de C'O'D', $= K_1$; quant à l'action du liquide compris entre les deux plans COD et C'O'D', elle est évidemment nulle. On reconnaît, en outre, que $K_1 = \frac{2\pi\varrho^2}{3}\int_0^\infty r^3\varphi(r)dr$, et par conséquent $K_1 = K$; l'équation d'équilibre est donc

$$K + g\varrho\alpha + P - \mu = 0.$$

Lorsque la surface du liquide est plane, on a $\mu = 0$, et si alors on laisse O' se rapprocher de O, il en résulte $g\varrho\alpha = 0$, et par conséquent $K = -P$. Il faudrait donc que K fût négatif, ce qui ne se peut pas, à moins que l'action $\varphi(r)$ ne change de signe et ne devienne répulsive au lieu d'être attractive. Pour supporter la pression de l'air, les molécules de la surface doivent donc avoir une tendance répulsive; mais pour qu'elles puissent exercer l'action μ, c'est-à-dire l'action par laquelle le ménisque soulève le liquide, nous devons de nouveau leur supposer une tendance attractive. Les forces moléculaires ont donc ici à la fois une action attractive et une action répulsive, qui s'exercent chacune séparément, sans donner lieu à une résultante. Or cela est impossible. Poisson cherche pourtant à l'expliquer en disant: *Tous les phénomènes de la capillarité naissent aussi des forces moléculaires, mais ils dépendent d'une autre partie de la résultante, différente de la pression et dans laquelle au contraire l'attraction a toujours le dessus.*

Il ressort de ce qui précède, que Poisson, après s'être fait d'abord une conception de l'état liquide, a voulu compléter cette conception pour l'adapter au phénomène que présentent les tubes capillaires, mais qu'il est arrivé ainsi à quelque chose d'inintelligible. En effet, dans l'hypothèse où aucune force extérieure n'agit sur

le liquide, les molécules de celui-ci se placent dans un certain état d'équilibre. Les molécules de la surface se trouvent alors, par rapport aux molécules suivantes, à une distance telle qu'il n'y a plus ni attraction, ni répulsion; car, si une pareille action existait, les molécules se rapprocheraient ou s'éloigneraient. Si maintenant on suppose que la pression de l'air se fait sentir sur cette surface, les molécules de la surface sont amenées à une distance moindre des molécules suivantes; il en résulte une tendance répulsive, qui est contre-balancée par la pression de l'air; néanmoins, pour rendre compte des phénomènes capillaires, on admet alors une incompréhensible action attractive.

Nous ne pousserons pas plus loin l'examen de la théorie de Poisson. Après avoir signalé, dans ce qui précède, les objections que soulèvent, à mon sens, les différentes théories émises, je vais maintenant exposer l'idée que je me fais moi-même de l'état liquide et de la cause des phénomènes capillaires.

II.

Quand il s'agit d'expliquer des phénomènes, il faut commencer par se former une conception de la matière dans laquelle ces phénomènes se passent. Une pareille conception, toutefois, n'embrasse pas la constitution entière de cette matière, mais seulement les propriétés qui peuvent donner naissance aux phénomènes en question; tout ce qu'on est en droit de demander, c'est que cette conception ne soit pas en désaccord avec d'autres propriétés.

C'est ainsi que les propriétés d'un liquide, contenu dans un vase et soumis à l'action de la pesanteur, correspondent entièrement à celles d'une masse de globules, supposés parfaitement sphériques et non compressibles; cette dernière propriété doit aussi être attribuée à la paroi du vase. Nous pouvons nous représenter les globules aussi petits que possible, mais conservant toujours une certaine dimension. Lorsque ces globules seront mis dans un vase, chacun d'eux tendra à gagner le point le plus

bas, et si A (fig. 7) représente le fond du vase, les globules se disposeront comme l'indique la figure. La pression verticale augmente avec la profondeur, tout comme dans un liquide; la pression sur la paroi latérale se produit également et est aussi régulièrement croissante avec la profondeur; car, en supposant que A représente la paroi latérale, β^3 presse aussi bien sur α^4 que sur β^4, et si la paroi latérale n'y était pas, α^4 serait refoulé.

Comme nous avons supposé les globules non compressibles, la masse est homogène.

Pour déterminer maintenant l'équation d'équilibre, dans la direction de la pesanteur, d'une colonne de globules, nous sommons les forces que la pesanteur exerce sur les différents globules; ces forces sont tenues en équilibre par la résistance passive de la base de la colonne.

Nous pouvons appliquer à la masse de globules les considérations mathématiques dont on fait usage dans l'hydrostatique, et partager la masse en parallélipipèdes élémentaires.

Soient x, y, z les coordonnées d'un des sommets d'un pareil parallélipipède, et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ celles de l'autre sommet, l'axe des z étant placé dans la direction de la pesanteur. On a alors en général l'équation

$$dp = \varrho\,(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dans le cas admis plus haut, on a X et Y $= 0$ et Z $= g$.

En supposant maintenant que des forces attractives existent entre les globules eux-mêmes, ainsi qu'entre les globules et la paroi, il s'agit de savoir si nous obtiendrons des phénomènes semblables à ceux que nous présentent les liquides.

Examinons d'abord comment se comporte la pression dans l'intérieur de la masse de globules, à une distance plus grande que le rayon d'activité a. Soit figure (8) la représentation d'une rangée de globules au milieu de la masse. Supposons que l'attraction soit encore appréciable entre (3) et (6); alors (4) est attiré vers (5), mais en outre pressé par l'attraction entre (3 et 6), (5 et 3), (5 et 2), (4 et 6) et (4 et 7). La pression entre

(4) et (5) est donc la somme de toutes ces pressions. Nous pouvons nous représenter de la même manière la pression entre tous les globules et dans toutes les directions.

Si nous déterminons l'équation (1) pour ce cas, on a encore X et $Y = 0$, par conséquent $dp = g \varrho dz$; cette équation, étant intégrée, donne

$$p = g \varrho z + c.$$

La constante c indique la pression constante qui, d'après ce qui précède, doit régner partout à l'intérieur du liquide.

Supposons maintenant que la figure (8) représente une rangée de globules normale à la surface de la masse des globules, et séparée de la paroi du vase par une distance plus grande que le rayon d'activité a de cette paroi; le globule (1) est donc situé à la surface. La pression est restée la même entre (4 et 5) et (3 et 4), mais non entre (2 et 3); ici manque la pression qui pourrait être exercée sur (3) par l'attraction d'un globule placé au-dessus de (1); entre (1 et 2), ne subsiste plus que la pression qui s'exerce entre (1 et 2), (1 et 3) et (1 et 4). Nous voyons donc que dans la direction de la surface la pression diminue, ou qu'à partir de la surface elle augmente jusqu'à la pression constante trouvée ci-dessus. La pression dans le plan horizontal reste la même que précédemment, mais dans les directions comprises entre le plan horizontal et la verticale la pression n'est plus la même; celle-ci diminue, et par conséquent ses composantes dans les directions X et Y diminuent aussi. Il est évident, toutefois, que pour une même couche cette pression est encore constante, et que par suite X et Y sont nuls dans l'équation (1). Comme d'ailleurs, dans cette couche superficielle, Z comprend, outre g, un terme $\varphi(z)$, — qui est 0 pour une distance de Z égale au rayon d'activité, — l'équation (1) devient

$$dp = (g \varrho + \varrho \varphi(z)) dz,$$

ou, après intégration,

$$p = g \varrho z + \varrho \int \varphi(z) dz.$$

A cette intégrale doit encore être ajoutée une constante, qui comprend la pression naissant des forces dirigées suivant X et Y.

Dans les deux cas, aussi bien à l'intérieur du liquide qu'à la surface, la pression dépend seulement de z; les surfaces de pression constante sont donc horizontales.

Considérons maintenant une partie du liquide située près de la paroi latérale du vase. Nous supposerons cette paroi, A (fig. 9), parfaitement plane et ayant une position verticale. La direction X est perpendiculaire à la paroi. Prenons d'abord, sur cette paroi, une portion qui soit à une distance de la surface ou du fond plus grande que a. Admettons, en outre, que la paroi attire le liquide plus fortement que les parties de celui-ci ne s'attirent entre elles.

La pression qui existe entre (1) et la paroi sera beaucoup plus forte que celle qui règne entre deux particules liquides à l'intérieur de la masse; la première comprend la pression entre (2) et la paroi et la pression entre (3) et la paroi, lesquelles sont toutes les deux plus fortes que si A était aussi une partie du liquide. Nous voyons donc que la pression augmente dans la direction de la paroi.

La pression suivant le plan Y Z reste la même, mais dans les directions comprises entre ce plan et la direction X la pression varie. Les composantes de cette pression dans le plan Y Z varient aussi; dans un même plan Y Z, toutefois, la pression est constante. Dans l'équation (1) on a donc $Y = 0$ et $Z = g$; mais X est une fonction $\varphi(x)$, qui s'annule à une distance égale au rayon d'activité de la paroi. L'équation devient donc

$$dp = \varrho\, \varphi(x)\, dx + \varrho\, g\, dz,$$

ou

$$p = \varrho\, g\, z + \varrho \int \varphi(x)\, dx.$$

Cette intégrale doit être complétée par une constante provenant de la pression qui existe dans le plan Y Z.

Comme la variation de la pression ne dépend plus de z seul,

nous voyons que les surfaces de pression constante ne sont pas horizontales; mais, puisqu'on a

$$z = \frac{p - \varrho \int \varphi(x)\, dx}{\varrho g},$$

on en conclut que, tant que $\int \varphi(x)\, dx$ est positif, z est, pour une même valeur de p, plus petit; la surface de pression constante est donc infléchie vers le haut. Si au contraire $\int \varphi(x)\, dx$ est négatif, z est plus grand; la surface est alors infléchie vers le bas, et c'est ce qui arrivera pour les liquides dont l'attraction sur eux-mêmes est plus forte que celle de la paroi sur le liquide.

On obtient ainsi une idée nette de la forme des différentes couches de pression constante, jusqu'à la couche superficielle. Il est clair aussi que, pour cette partie de la paroi, il ne peut y avoir de variation de pression qu'en deçà de la distance à laquelle cette pression agit. L'expression $\int \varphi(x)\, dx$ devient constante au-delà de la distance a, égale au rayon d'activité de la paroi.

Passons maintenant à la partie de la paroi qui est située vers le haut du liquide; nous trouvons ici une combinaison des deux cas précédents. L'équation (1) devient alors

$$dp = \varrho\, \varphi(x)\, dx + \varrho\, \varphi(z)\, dz + \varrho\, g dz \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Cette équation est parfaitement exacte avant l'ascension du liquide; mais il est clair qu'il faudra encore y ajouter un terme lorsque le liquide aura été soulevé. Pour nous en rendre compte, considérons de nouveau la figure (7). En supposant que A soit la paroi latérale, les particules β et γ tendront à repousser α, et celle-ci ne pouvant céder vers le bas, sera refoulée vers le haut; de même, mais avec moins de force, γ tendra à écarter β. Lors donc que l'attraction de la paroi est la plus forte, la surface du liquide sera concave au voisinage de la paroi. Soit figure (10) la représentation de la partie du liquide qui se trouve

en deçà de la limite a à partir de la surface et en deçà de la limite a à partir de la paroi. Ici la pression, dans la direction vers la paroi et vers la surface, croîtra ou décroîtra encore davantage; cela dépendra du lieu que la particule occupe par rapport à l'axe des x et à celui des z. Il s'agirait donc d'introduire cette condition dans l'équation (2). Mais, comme nous n'avons pas la moindre donnée concernant la manière dont la pression varie dans cette partie du liquide, nous n'essayerons pas de modifier l'équation (2) en ce sens; nous remarquerons seulement que la pression dans cette partie n'exerce nullement, sur le liquide ambiant, l'influence qu'on lui attribue ordinairement. En dehors de cette partie, tout se passe comme nous l'avons exposé plus haut; on peut se représenter cette partie comme se plaçant en équilibre et sous l'influence de la paroi, et sous celle de la masse liquide ambiante, et sous celle de sa propre attraction; sa pesanteur seule se fait sentir aussi à toutes les couches sous-jacentes. Plus loin nous dirons quel effet peut produire cette pesanteur. La couche superficielle enveloppe donc simplement la surface sous-jacente, convexe ou concave, de pression constante.

De ce qui précède, nous pouvons tirer les conclusions suivantes:

1°. A l'intérieur de la masse de globules se produit, par suite de leur mutuelle attraction, une pression constante.

2°. Dans la couche superficielle, cette pression diminue.

3°. Dans la couche située près de la paroi, cette pression augmente ou diminue. Par suite, la masse aura près de la paroi une surface concave ou convexe.

4°. Rien n'autorise à croire que la pression, née de l'attraction mutuelle dans la couche supérieure, se transmette aux autres couches.

5°. La courbure des surfaces de pression constante ne s'étend pas plus loin que la limite d'influence de la paroi.

6°. La paroi verticale seule n'est pas capable de tenir relevée la masse de globules.

Pour mettre ce dernier point en évidence, il n'y a qu'à supposer que dans la figure (9) la particule (1) se trouve seule près de la paroi; elle est alors pressée perpendiculairement contre cette

paroi; mais la pesanteur ne cesse pas d'agir, n'est contre-balancée par rien et fait mouvoir le globule le long de la surface.

Nous avons supposé jusqu'ici que la paroi était une surface plane. Si nous admettons maintenant que la paroi soit courbe et ait sa concavité tournée vers le liquide, il est clair que l'attraction de cette paroi augmentera avec la courbure. Ce cas se présente lorsque nous introduisons un tube capillaire dans la masse de globules. Soit (fig. 11) une section menée par l'axe du tube capillaire, et admettons que l'attraction sensible s'étende à la distance HL = GK. Au liquide situé au-dessus de GH s'appliquent alors les considérations exposées plus haut; seulement, l'attraction vers la paroi est plus forte et décroît rapidement vers l'axe du tube, où elle est nulle, attendu que là les actions des différents côtés du tube se font équilibre. Au centre le liquide se maintiendra donc à la hauteur ordinaire, tandis qu'à partir de ce point les surfaces d'équilibre se relèveront ou s'abaisseront vers la paroi.

Mais si nous considérons une particule placée au-dessous de GH, nous n'obtenons pas un état d'équilibre. Prenons, par exemple, la particule p, située sur l'axe; elle est attirée plus fortement dans les directions K et L que dans les directions opposées, parce que nous supposons l'attraction du tube plus forte que celle du liquide. Comme p se trouve précisément sur l'axe, elle sera attirée avec une force égale vers K et vers L, d'où il résulte que dans la direction perpendiculaire à l'axe, les composantes seront égales et opposées, tandis que parallèlement à l'axe elles seront égales et dirigées dans le même sens, de sorte qu'elles tendront à mouvoir la particule dans cette dernière direction. Les particules situées en dehors de l'axe conserveront de même une résultante dans la direction de l'axe, et il devient ainsi manifeste qu'à l'extrémité du tube naîtra une pression, qui refoulera le liquide devant elle, tout juste jusqu'à ce que cette force soit équilibrée par la pesanteur du liquide soulevé.

L'ascension effective ne dépend donc pas de la courbure de la surface, mais de l'action de l'extrémité inférieure du tube.

Comme la relation entre l'attraction et la distance est encore inconnue, il me paraît que par la voie actuelle, c'est-à-dire au moyen des tubes capillaires, on n'obtiendra provisoirement pas de résultats mathématiques ayant quelque valeur pratique.

Les expériences avec les plaques adhésives se prêteraient mieux à cette recherche, si elles n'avaient pas un défaut, provenant de ce que ces plaques ont nécessairement un bord. Représentons-nous une plaque adhésive infiniment grande, posée sur la surface d'un liquide. S'il était possible de mesurer la force nécessaire pour détacher cette plaque du liquide, on pourrait en conclure l'attraction par unité de surface, puisque cette attraction est évidemment perpendiculaire à la surface de la plaque.

Mais, dans la réalité, la plaque est de dimensions finies, et alors les bords peuvent avoir une grande influence; l'attraction, près de ces bords, n'est plus normale à la surface de la plaque, mais s'exerce suivant différentes directions.

Tenir compte de ces différentes directions ne servirait de rien, vu notre ignorance au sujet de la relation dont il a été question plus haut.

Les expériences que M. Wilhelmy [1]) a faites sur des corps en partie immergés me paraissent plus propres à conduire au but.

Avant d'en rappeler les résultats, je veux toutefois considérer le cas d'immersion totale d'un corps de forme très simple, la sphère.

Soit MB (fig. 12) la section de cette sphère suivant un grand cercle. Représentons-nous la sphère (elle est suspendue au plateau d'une balance) plongée à une profondeur telle que sa distance à la surface du liquide soit plus grande que le rayon d'activité. Soit BC ce rayon. Les particules de la première couche sont attirées avec le plus de force. La seconde couche est attirée un peu moins fortement et presse sur la première. De même, chacune des couches suivantes, jusqu'à la dernière, qui se trouve à la distance BC de la surface, est sollicitée vers la paroi de la sphère avec une force successivement décroissante. Nous avons donc,

---

[1]) *Pogg. Ann.*, t. CXIX, p. 177, et t. CXXII, p. 1.

tout comme les cas précédemment considérés, une pression croissante à mesure qu'on se rapproche de la sphère. Les particules (1) ne peuvent pas se mettre plus près de la sphère; les particules (2) en sont à une petite distance et cherchent à repousser les premières; mais comme celles-ci sont dans l'impossibilité de céder, les particules (2) restent à cette distance. Les conditions sont analogues entre (2) et (3), etc.

De même que les couches (2) et (3) etc. tendent à se rapprocher de la sphère, de même la sphère tend à se rapprocher de ces couches. Mais elle en est pareillement empêchée par la couche (1). En outre, à la distance où elle se trouve au-dessous de la surface, la sphère est attirée de tous les côtés avec une force égale. Elle ne pèsera donc pas plus que s'il n'y avait aucune attraction entre elle et les particules liquides. Toujours, bien entendu, dans le cas où le liquide n'acquiert pas une densité plus grande par cette compression.

Généralement, toutefois, on admet que la densité augmente par l'effet de l'attraction. Supposons qu'il en soit ainsi, et appelons α la densité moyenne de la couche BC, cette densité étant rapportée à celle du liquide ambiant, prise pour unité. La masse comprise dans la sphère MC est alors attirée vers le bas par une force égale à

$$\frac{4}{3}\pi\,\overline{MB}^3\,\beta + \frac{4}{3}\pi\,(\overline{MC}^3 - \overline{MB}^3)\,\alpha$$

(β est la densité de la sphère),
et repoussée vers le haut par une force égale à

$$\frac{4}{3}\pi\,\overline{MC}^3.$$

Le poids nécessaire pour la tenir en équilibre est donc

$$\frac{4}{3}\pi\,(\overline{MB}^3\,\beta + \overline{MC}^3\,\alpha - \overline{MB}^3\,\alpha - \overline{MC}^3) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Si le liquide n'est pas comprimé, on a $\alpha = 1$, et le poids nécessaire pour soutenir la sphère est

$$\frac{4}{3}\pi\,(\overline{MB}^3\,\beta - \overline{MB}^3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

De la différence entre (3) et (4) on pourrait alors conclure exactement la densité moyenne du liquide qui entoure la sphère. D'après mon opinion, à la vérité, on ne trouvera pas une différence appréciable; mais la question mérite certainement d'attirer l'attention de quelqu'un qui soit en mesure de faire à ce sujet des expériences précises. Une des difficultés qu'on aura à surmonter dans ces expériences, c'est l'inexactitude que le frottement introduit dans les pesées. M. Wilhelmy aussi en a déjà fait la remarque.

Jusqu'à ce que l'étude directe ait tranché dans l'un ou dans l'autre sens la question de la densité à la surface, je prendrai toutefois la liberté de ne tenir aucun compte de l'augmentation problématique de cette densité. Dans cette hypothèse, une sphère placée tout entière sous la surface d'un liquide n'aura donc pas besoin d'un surplus de force pour rester en équilibre.

Lorsque la sphère était entièrement immergée, la couche liquide la plus voisine n'avait aucune issue pour échapper à la pression des couches suivantes; mais quand une partie seulement de la sphère plonge dans le liquide, la couche interne de celui-ci peut céder à la pression près du bord, là où la sphère émerge, et permettre ainsi aux couches plus extérieures de se rapprocher de la sphère. Plus le bord est étendu, plus cette action aura l'occasion de se manifester. Le liquide au bord sera donc soulevé contrairement à la pesanteur, pressera sur le liquide qui entoure la sphère, et tendra à déprimer, en même temps que celui-ci, la sphère elle-même. La manière dont cet effet se produit se laisse le mieux démontrer pour les cylindres que M. Wilhelmy a employés dans ses expériences.

Représentons-nous (fig. 13) la section d'un pareil cylindre et la masse de globules qui l'entoure. Les courbes successives, à partir du cylindre, étant désignées par (1), (2), etc., la couche (1) est pressée par (2), d'où résulte l'ascension en A, ainsi que nous l'avons déjà expliqué plus haut. Ce globule soulevé (1 α) presse sur les globules sous-jacents, et exerce par suite une pression sur la couche enveloppante (2) et sur le cylindre. En

dehors de la couche (2), ou plutôt en dehors du rayon d'activité, cette pression n'est pas ressentie, attendu qu'elle est entièrement équilibrée par l'attraction du cylindre sur cette matière ambiante. Le globule soulevé exerce donc sur la couche (2) une pression égale à celle qu'il détermine sur le cylindre; en même temps que cette pression tend à éloigner le liquide du cylindre, elle tend aussi à éloigner le cylindre du liquide, et par conséquent on n'en remarquerait rien si la surface de la couche liquide (2) avait la même étendue que celle du cylindre. Mais la surface du liquide est plus grande. Sur cette surface prise en totalité agit donc une pression plus grande, et le liquide, cherchant à obéir à cette action, entraîne le cylindre. Si h est la hauteur de la partie immergée du cylindre, et r le rayon de la base, la surface de la couche liquide (2) surpasse celle du cylindre de la quantité

$$2\pi r dr + 2\pi h dr + 2\pi r dh.$$

De ces trois termes, $2\pi h dr$ est celui qui a le moins d'influence, attendu qu'il représente la traction exercée sur la paroi latérale, perpendiculairement à l'action de la pesanteur. En outre, cette force est neutralisée à raison de l'opposition qui existe entre ces tractions.

Les deux autres termes dépendent seulement de r, puisqu'on peut regarder dr et dh comme constants pour des cylindres différents. De ces attractions, il faut prendre la composante suivant la direction de la verticale. Quand le rayon de la base augmente, la force qui attire le cylindre vers le bas augmente donc aussi.

Rapprochons de cette conclusion le résultat des expériences de M. Wilhelmy. Cet expérimentateur a opéré sur des cylindres de bases différentes, et a trouvé qu'à égalité de profondeur d'immersion l'augmentation du poids du cylindre était proportionnelle au rayon du cylindre. Cette relation n'est pas rigoureuse, car pour les cylindres plus petits le poids est moindre qu'il ne devrait l'être d'après la proportion susdite. Mais lorsque le rayon est plus petit, la courbure est plus grande, et il est clair que l'at-

traction est alors plus faible. Ceci, à la vérité, serait en contradiction avec le fait que pour les lames planes l'attraction est relativement moindre que pour les cylindres de grandes dimensions. Les lames planes, toutefois, ont, avec une masse plus petite, une surface beaucoup plus grande; l'influence nuisible du frottement est alors certainement plus sensible. M. Wilhelmy dit que le frottement est très gênant dans les pesées. Ce frottement est sans doute aussi la cause pour laquelle à profondeur plus grande le poids augmente en apparence, ainsi qu'il résulte des expériences de M. Wilhelmy.

Avant de finir, je dois encore dire un mot des pellicules liquides, qui sont regardées comme la preuve la plus certaine de la pression dans la couche superficielle.

M. Plateau a fait un grand nombre de belles expériences sur les pellicules liquides. Après avoir soufflé une bulle, il déterminait au moyen d'un manomètre la pression exercée par la pellicule [1]). D'après la théorie, on partage la pellicule en deux autres, qui exercent chacune une action opposée: l'une $B - \frac{1}{2} A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, l'autre $B + \frac{1}{2} A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$.

Lorsque la pellicule est une surface sphérique, on a $R = R'$; la différence des deux forces est donc alors

$$\frac{2A}{R};$$

A et R sont ici des constantes, qui dépendent de la nature du liquide. Dans les considérations mathématiques, on a toujours regardé les pellicules comme des surfaces. En réalité, pourtant, ce sont toujours des corps, et, en me fondant sur ce fait, je crois devoir attribuer la pression dans le manomètre à une tout autre cause.

Deux suppositions peuvent être faites quant à l'état des pellicules: l'une, que le liquide s'y trouve dans un état d'extension;

[1]) Plateau, § 119.

l'autre, qu'il y est à l'état ordinaire, comme dans les autres parties de la couche superficielle d'un liquide.

La conséquence nécessaire du premier état serait que la pellicule, après avoir été gonflée, se contracterait de nouveau, et plus elle aurait été distendue, plus la contraction serait rapide. Or on voit les grandes bulles de savon se dégonfler très lentement [1]). Reste donc la seconde hypothèse. Nous admettrons, en conséquence, que les particules sont dans le même état qu'à la surface d'un liquide.

Représentons-nous maintenant (fig. 14) une partie de la surface. Soit *a b c d* la section d'une des pyramides tronquées infiniment petites en lesquelles on peut se figurer que la pellicule est partagée. La particule *p* est attirée par les diverses parties de la pyramide voisine. La résultante de ces forces peut être décomposée suivant deux directions, l'une perpendiculaire à *cd*, l'autre coïncidente avec *cd*. La composante perpendiculaire à *cd* n'est évidemment pas assez forte pour enlever la particule *p* à la pyramide; l'attraction des particules de *abcd* est prépondérante, attendu que celles-ci sont plus rapprochées. L'autre composante donne naissance à la presssion sur les plans *ad* et *bc*. Chacune des particules de *abcd* est attirée de cette manière; la résultante de toutes les attractions dans la direction *cd* est nulle, celle dans la direction perpendiculaire ne l'est pas.

La pyramide *abcd* ne peut toutefois obéir à cette attraction, parce que *ab* est plus grand que *cd* et que par conséquent la pyramide devrait écarter la pyramide voisine; or elle en est empêchée par les attractions qui s'exercent à travers les petits plans *ad* et *bc*. Les particules ne sont donc pas supportées par l'air, mais s'appuient l'une sur l'autre.

Considérons maintenant une partie de la pellicule au voisinage du corps auquel la pellicule est attachée. Soit A (fig. 15) ce corps. La particule *p* est attirée plus fortement dans la direction de A que dans la direction opposée. Les particules situées au

---

[1]) Plateau, § 120.

voisinage immédiat de A seront refoulées par les particules suivantes, et ainsi les divers petits plans seront de nouveau attirés, l'un après l'autre, vers la matière solide.

Le mouvement de la pellicule doit donc être attribué à l'attraction de A, et dans ce mouvement la pellicule doit chasser l'air devant elle. Si cet air n'a pas d'issue, il offre une résistance. Mais A n'en attire pas moins les particules liquides, et il en résulte alors une tension plus forte de la pellicule, qui fait équilibre à la pression de l'air.

Le fait, que la pression est plus forte lorsque la pellicule a moins d'étendue, est dû à ce que la base du liquide devient de plus en plus large à mesure que celui-ci se retire vers A. Une conséquence nécessaire de ces considérations, c'est que, si l'on met en contact avec une sphère de même rayon une portion plus grande du chalumeau, on obtient une contraction beaucoup plus rapide. L'expérience a confirmé cette prévision.

Une bulle de savon, attachée à l'ouverture d'une pipe en terre, ne montrait que peu de contraction; mais lorsque je faisais passer la bulle sur le côté du fourneau, en y introduisant un petit tube de verre pour laisser échapper l'air, on voyait la bulle se resserrer rapidement.

J'espère avoir fait comprendre suffisamment, par l'esquisse qui précède, mes idées concernant la cause de certains phénomènes offerts par les liquides. Quant à des résultats mathématiques, je n'en ai pas encore obtenu; pour y parvenir, des forces supérieures aux miennes sont peut-être nécessaires. Mais si j'ai convaincu quelques lecteurs de l'imperfection des théories actuelles, j'en éprouverai une grande satisfaction.

QUATRIÈME MÉMOIRE

SUR LA

FAUNE ICHTHYOLOGIQUE

DE LA

NOUVELLE-GUINÉE,

PAR

P. BLEEKER.

(*Avec deux planches.*)

Lorsque je publiai, il a neuf ans, ma dernière notice [1]) sur la faune ichthyologique de la Nouvelle-Guinée, j'y portai le nombre des espèces connues de cette grande île à 270, chiffre qui se réduit à 261 quand on supprime les espèces reconnues pour être des doubles emplois, mais qui remonte à 269 par les huit espèces ajoutées depuis lors à cette faune.

Au mois d'Août dernier, visitant le Muséum zoologique de Hambourg, j'y trouvai un grand nombre de poissons innomés. La direction du Muséum, qui me voyait disposé à les déterminer, m'ayant

[1]) Les articles antérieurs que j'ai publiés sur la faune ichthyologique de la Nouvelle-Guinée sont:

Bijdrage tot de kennis der vischfauna van Nieuw-Guinea. *Act. soc. scient. Ind. néerl.* VII, pag. 1—24. (Déc. 1858).

Vischsoorten van Nieuw-Guinea. *Nat. T. Neerl. Ind.*, XXII, p. 98—100 (1860).

Troisième notice sur la faune ichthyologique de la Nouvelle-Guinée. *Versl. Kon. Akad. Wet.*, 2e Rks. II, p. 281—283 (1868).

prié de vouloir continuer les déterminations déjà faites lors de mon court séjour à Hambourg, je me suis chargé volontiers d'un examen plus suivi des trésors ichthyologiques du Muséum. M. le docteur J. G. Fischer, directeur de cet établissement, a eu la complaisance de m'adresser un premier envoi, composé de collections faites à la Nouvelle-Guinée, à Singapore, au Japon, en Chine et à l'île Maurice.

Ayant fini l'examen de la collection de la Nouvelle-Guinée, j'en publie ici le résultat. J'y ai trouvé les 118 espèces suivantes.

* Leiobatis Gerrardi Blkr.
Taeniura lymma MH.
* Callyodon carolinus Val.
* Pseudoscarus pentazona Blkr.
* Pseudodax moluccanus Blkr.
* Anampses neoguinaicus Blkr, nov. spec.
* Cheilinus ceramensis Blkr.
* Coris formosa Blkr.
* Bodianus mesothorax Blkr.
* Platyglossus (Güntheria) scapularis Blkr.
„ (Platyglossus) melanurus Blkr.
* Hemipteronotus Twistii Blkr.
* Priacanthus hamrur CV.
* Pseudanthias hypselosoma Blkr, nov. spec.
* Epinephelus miniatus Blkr.
„ boelang Blkr.
„ micropsion Blkr.
* Anyperodon leucogrammicus Günth.
Grammistes orientalis Bl. Schn.
* Moronopsis ciliatus Blkr.
Therapon (Datnia) jarbua Blkr.
* Amia ceramensis Blkr.
* „ kallopterus Blkr.
* Caesio chrysozonus K. v. H.
* Symphysanodon typus Blkr, nov. spec.
* Scolopsis personatus CV.
* Lutjanus biguttatus Blkr.
* „ bengalensis Blkr.
* „ lioglossus Blkr.
* „ chirtah.
Taurichthys chrysostomus Blkr.
„ macrolepidotus Blkr.
* Hemitaurichthys polylepis Blkr.
* Megaprotodon strigangulus Blkr.
* Tetragonoptrus (Tetragonoptrus) punctato-fasciatus Blkr.
* Tetragonoptrus (Tetragonoptrus) octo-fasciatus Blkr.
* „ (Linophora) auriga Blkr.
* „ („) vagabundus Blkr.
* „ („)Rafflesi Blkr.

Tetragonoptrus (Lepidochaetodon) Kleini Blkr.
* „ (Lepidochaetodon) unimaculatus Blkr.
* „ (Citharoedus) Meyeri Blkr.
* „ (Chaetodontops) selene Blkr.
* „ (Gonochaetodon) triangulum Blkr.
* Coradion chrysozonus Kp.
Holacanthus bicolor Bl.
* „ Lamarcki Lac.
* „ trimaculatus Lac.
* „ tibicen CV.
* „ Vroliki Blkr.
* Acanthochaetodon semicirculatus Blkr.
Zanclus cornutus CV.
Platax vespertilio Cuv.
Parupeneus multifasciatus Blkr.
* „ barberinus Blkr.
* „ spilurus Blkr.
* „ luteus Blkr.
* „ cherserydros Blkr.
* Upeneus tragula Rich.
Plesiops nigricans Rüpp.
Premnas biaculeatus Blkr.
Prochilus bifasciatus Blkr.
„ melanopus Blkr.
Pomacentrus (Pomacentrus) pavo Lac.
„ (Pseudopomacentrus) melanopterus Blkr.
Pomacentrus (Pseudopomacentrus) moluccensis Blkr.
Pomacentrus (Pseudopomacentrus) trilineatus Blkr.
* Paroglyphidodon xanthurus Blkr.
Holocentrum caudimaculatum Rüpp.
„ rubrum Rüpp.
* „ diadema CV.
* Myripristis Pahudi Blkr.
Pseudomonopterus (Dendrochirus) zebra Blkr.
* Pseudomonopterus (Pterois) antennatus Blkr.
Pseudomonopterus (Pterois) volitans Blkr.
Sebastopsis polylepis Gill.
Parascorpaena bandanensis Blkr.
Scorpaenopsis Novae Guineae Blkr.
* Platycephalus indicus Blkr.
* „ malayanus Blkr.
* Hippocampus kuda Blkr.
Gastrotokeus biaculeatus Heck.
* Amphisile strigata Günth.
Aulostoma chinense Lac.
Solenostomus serratus Blkr.
Citula armata Rüpp.
* Seriola tapeinometopon Blkr.
Scomber loo CV.
Leptecheneis neucrates Gill.
* Scomberoides Sancti Petri CV.

* Gazza equulaeformis Rüpp.
* Teuthis fuscescens Günth.
* „ marmorata Günth.
* „ virgata Günth.
Acanthurus ctenodon CV.
Rhombotides olivaceus Blkr.
„ lineatus Blkr.
Harpurus rhombeus Blkr.
Balistes (Balistapus) bursa Blkr.
* Triacanthus oxycephalus Blkr.
* Trichidion microstoma Blkr.
Sphyraena Forsteri CV.
* Parapercis cylindrica Blkr.
* Mugil coeruleomaculatus Lac.
* Ophiocara Hoedti Blkr.
* Salarias Sebae CV.
* Fierasfer gracilis Blkr.
* Mastaccembelus strongylurus Blkr.
* Plotosus arab Blkr.
Saurida nebulosa Val.
* Chanos salmoneus Günth.
* Muraena mauritiana Blkr.
* Gymnothorax griseo-badius Blkr.
* „ flavimarginatus Blkr.
* „ isingleenoides Blkr.
* Strophidon polyodon Blkr.
* Echidna variegata Forst.
Ostracion punctatus Lac.

73 de ces espèces n'étaient pas connues jusqu'ici comme néo-guinéennes. Elles sont marquées d'un * et font monter le chiffre total des espèces de cette grande île à 342. L'augmentation est assez considérable pour qu'il me paraisse utile de dresser une nouvelle liste des espèces connues; l'énumération antérieure, publiée il y a près de vingt ans, ne comprenait, abstraction faite des espèces nominales, que 239 espèces.

La liste suivante énumère toutes ces espèces sous les dénominations qui leur conviennent d'après l'état actuel de la science. J'ai eu soin d'y ajouter les noms sous lesquels elles ont été enregistrées dans mes articles antérieurs sur la même matière.

La liste ne comprend que trois espèces inédites, dont une est le type d'un genre nouveau. J'ai ajouté à la description et à la figure de ces espèces celles de deux autres, dont l'une est nouvelle pour l'Insulinde et dont l'autre fut introduite dans la science d'après un individu mal conservé du jeune âge.

Le chiffre de 341 espèces montre assez que l'état de cette partie de la science est encore dans son enfance; des recherches ultérieures pourront au moins le quadrupler.

La Nouvelle-Guinée ayant attiré, surtout dans les derniers temps, l'attention, tant des naturalistes que des géographes, et les voyages et les expéditions vers cette grande terre inconnue se multipliant de plus en plus, on peut espérer que l'ichthyologie aura enfin sa bonne part des explorations prochaines. Il est aussi à désirer qu'on s'applique, plus qu'on ne l'a fait jusqu'ici, à faire des collections des poissons fluviatiles, dont, jusqu'à présent, on ne sait presque rien.

Dès qu'on possédera des notions un peu nombreuses et précises sur les poissons qui habitent l'intérieur de l'île, on pourra juger avec plus de sureté de l'étendue du caractère australasien de la faune néo-guinéenne que ne l'a permis la connaissance acquise jusqu'ici de ses autres faunes de vertébrés et d'invertébrés.

Species Piscium neoguinaicae hucusque cognitae.

Carcharioidei.

1 Cynocephalus (Prionace) melanopterus Blkr = Carcharias (Prionodon) melanopterus MH. — Hab. Doreh.

2 „ (Prionace) pleurotaenia Blkr = Carcharias (Prionodon) pleurotaenia Blkr.

3 „ (Hypoprion) Mackloti Blkr = Carcharias (Hypoprion) Mackloti MH.

Scyllioidei.

4 Scyllium maculatum Gr. — Hab. Doreh.

Rhinobatidoidei.

5 Rhinobatus (Rhinobatus) armatus Gr. — Hab. Doreh.

Trygonoidei.

6 Leiobatis Gerrardi Blkr = Trygon Gerrardi Gr. = Trygon macrurus Blkr.

7 „ Kuhli = Trygon Kuhli MH. — Hab. Doreh.

8 Leiobatis uarnak Blkr = Trygon uarnak Rüpp.
9 Taeniura lymma MH.

Scaroidei.

10 Pseudoscarus dimidiatus Blkr = Scarus dimidiatus Blkr. — Hab. Doreh.
11 „ frenatus Blkr = Scarus frenatus Lac. — Hab. Doreh.
12 „ pentazona Blkr.
13 „ sumbawensis Blkr = Scarus sumbawensis Blkr. — Hab. Doreh.
14 Scarichthys auritus Blkr = Scarus naevius Val. = Scarichthys naevius Blkr. — Hab. Doreh.
15 Callyodon carolinus Val.

Labroidei.

16 Pseudodax moluccanus Blkr = Odax moluccanus CV.
17 Cheilinus celebicus Blkr. — Hab. Doreh.
18 „ ceramensis Blkr.
19 „ fasciatus CV. — Hab. Doreh.
20 „ radiatus Blkr — Cheilinus diagrammus CV. — Hab. Doreh.
21 Pseudocheilinus hexataenia Blkr = Cheilinus hexataenia Blkr. — Hab. Doreh.
22 Cirrhilabrus solorensis Blkr. — Hab. Doreh.
23 Cheilio inermis Rich. = Cheilio auratus Lac. — Hab. or. sept.
24 Coris formosa Blkr = Julis (Halichoeres) formosus Blkr.
25 Anampses neoguinaicus Blkr spec. nov.
26 Julis dorsalis QG. — Hab. Doreh.
27 „ lunaris CV. — Hab. Doreh.
28 „ melanochir Blkr. — Hab. Doreh.
29 Platyglossus (Platyglossus) melanurus Blkr = Julis (Halichoeres) melanurus Blkr. — Hab. Doreh.
30 „ (Paraplatyglossus) prosopeion Blkr = Julis (Halichoeres) prosopeion Blkr. — Hab. Doreh.

31 **Platyglossus** (Güntheria) scapularis Blkr = Julis elegans K. v. H. = Güntheria coeruleo-vittata Blkr.

32 „ (Güntheria) trimaculatus Blkr = Julis (Halichoeres) spilurus Blkr. — Hab. Doreh.

33 „ (Hemitautoga) centiquadra Blkr = Julis (Halichoeres) hortulanus Blkr. — Hab. Doreh.

34 „ (Hemitautoga) notophthalmus Blkr = Hemitantoga notophthalmus Blkr.

35 **Novaculichthys** macrolepidotus Blkr = Xyrichthys macrolepidotus CV. = Labrus Arago QG. = Novacula macrolepidota et Labrichthys? Arago Blkr.

36 **Xyrichthys** pavo Val. = Novacula pavo Blkr = Hab. Doreh.

37 **Hemipteronotus** pentadactylus Blkr = Novacula punctulata CV. — Hab. Doreh.

38 „ Twistii Blkr = Novacula Twistii Blkr.

39 **Hemigymnus** melanopterus Günth. = Tautoga melanopterus CV.

40 **Bodianus** mesothorax Blkr = Cossyphus mesothorax CV.

Percoidei.

41 **Priacanthus** hamrur CV.

42 **Pseudanthias** hypselosoma Blkr, spec. nov.

43 **Epinephelus** coeruleo-punctatus Blkr = Serranus albo-guttatus CV. — Hab. Doreh.

44 „ bontoides Blkr = Serranus bontoides Blkr. — Hab. Doreh.

45 „ aurantius Blkr = Serranus aurantius CV. — Hab. Doreh.

46 „ boelang Blkr = Serranus boelang, boenack CV. — Hab. Doreh.

47 „ maculatus Blkr = Serranus Quoyanus, Gaimardi, miliaris CV. = Serranus maculatus, Sebae Blkr. — Hab. Doreh.

48 „ merra Blkr = Serranus hexagonatus CV. — Hab. Doreh.

49 Epinephelus micropsion Blkr = Serranus micropsion Blkr. — Hab. Doreh.
50 „ miniatus Blkr = Serranus miniatus Rüpp.
51 „ argus Blkr. Schn. = Serranus myriaster CV.
52 „ urodelus Blkr = Serranus urodelus CV. — Hab. Doreh.
53 Anyperodon leucogrammicus Günth. = Serranus leucogrammicus Reinw.
54 Variola louti Blkr = Serranus punctulatus CV. — Hab. Doreh.
55 Grammistes orientalis Bl. Schn. — Hab. Doreh.
56 Moronopsis ciliatus Blkr = Dules marginatus CV.
57 Therapon (Datnia) jarbua Blkr = Therapon servus CV. — Hab. Doreh.
58 „ („) theraps Blkr = Therapon theraps CV. — Hab. Doreh.
59 Amia bandanensis Blkr = Apogon bandanensis Blkr. — Hab. Doreh.
60 „ ceramensis Blkr = Apogon ceramensis Blkr.
61 „ fasciata Gill = Apogon novemfasciatus CV. — Hab. Doreh.
62 „ frenata Blkr = Apogon fraenatus Val.
63 „ Hartzfeldi Blkr = Apogon Hartzfeldi Blkr. — Hab. Doreh.
64 „ kallopterus Blkr = Apogon kallopterus Blkr.
65 „ aurea Blkr = Apogon roseipinnis Cuv. — Hab. Doreh.
66 „ nigromaculata Blkr = Apogon nigromaculatus Hombr. Jacq.
67 „ Novae-Guineae Blkr = Apogon Novae-Guineae Val.
68 Caesio chrysozonus K. v. H.
69 Symphysanodon typus Blkr., nov. gen. et spec.
70 Scolopsis personatus CV.
71 „ bilineatus CV. — Hab. Doreh.
72 „ ciliatus Günth. = Scolopsis lycogenis CV.
73 „ temporalis CV.
74 Plectorhynchus Cuvieri Blkr = Diagramma Sebae Blkr. — Hab. Doreh.

75 Lutjanus amboinensis Blkr = Diacope rufolineata CV.? Mesoprion amboinensis et rufolineatus Blkr. — Hab. Lakahia.
76 „ bengalensis Blkr = Mesoprion octolineatus Blkr. — Hab. Doreh.
77 „ chirtah Blkr = Mesoprion chistah, annularis CV.
78 „ biguttatus Blkr = Serranus biguttatus CV.
79 „ butonensis Blkr = Mesoprion boutonensis Blkr. — Hab. or. septentr.
80 „ fulviflamma Blkr = Mesoprion fulviflamma Blkr. — Hab. or. sept.
81 „ lioglossus Blkr = Lutjanus monostigma Blkr.
82 „ bohar Blkr = Diacope bohar, quadriguttata CV. = Mesoprion quadriguttatus Blkr. — Hab. Doreh.
83 „ macolor Blkr = Mesoprion macolor Blkr.
84 „ marginatus Blkr = Mesoprion marginatus Blkr = Diacope waigiensis QG. — Hab. Doreh.
85 „ semicinctus Blkr = Mesoprion semicinctus CV. — Hab. Doreh.
86 „ argentimaculatus Blkr = Diacope argentimaculata CV. — Hab. or. sept.
87 „ Sebae Blkr = Diacope Sebae CV.
88 Aprion (Aprion) pristipoma Blkr = Dentex pristipoma Blkr.
89 Dentex tolu CV.
90 Pentapus caninus Blkr = Heterognathodon bifasciatus Blkr.
91 „ Hellmuthi Blkr = Heterognathodon Hellmuthi Blkr. — Hab. Doreh.
92 Monotaxis grandoculis Blkr = Lethrinus latidens CV.
93 Lethrinus kallopterus Blkr. — Hab. Doreh.
94 „ ornatus CV. — Hab. Doreh.
95 „ miniatus CV. = Lethrinus waigiensis CV.
96 „ reticulatus CV.
97 „ sordidus CV. = Lethrinus cocosensis Blkr.?
98 Diapterus filamentosus CV. = Gerres filamentosus CV.

Cirrhiteoidei.

99 Paracirrhites Forsteri Blkr = Cirrhites pantherinus CV. — Hab. Doreh.

100 Cirrhitichthys oxycephalus Blkr. — Hab. Doreh.

Toxoteoidei.

101 Toxotes jaculator Cuv.

Pempheridoidei.

102 Pempheris mangula CV. — Hab. Lakahia.

Chaetodontoidei.

103 Pimelepterus cinerascens Day = Pimelepterus altipinnis CV. = Pimelepterus tahmel Rüpp.

104 „ waigiensis QG. = Pimelepterus marciac CV.

105 Harpochirus punctatus Cant. = Drepane punctata CV.

106 Taurichthys chrysostomus Blkr = Heniochus chrysostomus L.B.

107 „ macrolepidotus Blkr = Heniochus macrolepidotus CV. — Hab. Doreh.

108 Hemitaurichthys polylepis Blkr.

109 Coradion chrysozonus Kp. = Chaetodon chrysozonus K. V. H.

110 Tetragonoptrus (Citharoedus) Meyeri Blkr = Chaetodon Meyeri Bl. — Hab. Doreh.

111 „ (Citharoedus) ornatissimus Blkr = Chaetodon ornatissimus Sab. — Hab. Doreh.

112 „ (Rabdophorus) ephippium Blkr = Chaetodon ephippium CV. — Hab. or. septentr.

113 „ (Rabdophorus) trifasciatus Blkr = Chaetodon vittatus CV. — Hab. Doreh.

114 „ (Tetragonoptrus) punctato-fasciatus Blkr = Chaetodon punctato-fasciatus CV.

115 „ (Tetragonoptrus) octofasciatus Blkr = Chaetodon octofasciatus Bl.

116 „ (Chaetodontops) fasciatus Blkr = Chaetodon lunula CV.

117 Tetragonoptrus (Chaetodontops) selene Blkr = Chaetodon selene Blkr.
118 „ (Lepidochaetodon) Kleini Blkr = Chaetodon virescens CV. — Hab. Musinama, Doreh.
119 „ (Lepidochaetodon) unimaculatus Blkr = Chaetodon unimaculatus Bl.
120 „ (Linophora) auriga Blkr = Chaetodon auriga Forsk.
121 „ (Linophora) Rafflesi Blkr = Chaetodon princeps CV. — Hab. Doreh.
122 „ (Linophora) vagabundus Blkr = Chaetodon vagabundus L.
123 „ (Oxychaetodon) falculo Blkr = Chaetodon ulietensis CV. — Hab. Doreh.
124 „ (Gonochaetodon) triangulum Blkr = Chaetodon baronessa CV. — Hab. or. sept.
125 Megaprotodon strigangulus Blkr = Chaetodon strigangulus Sol.
126 Holacanthus bicolor Bl. — Hab. Doreh.
127 „ diacanthus Günth. = Holanthus dux Lac. — Hab. or. sept.
128 „ Lamarckii Lac.
129 „ tibicen CV. = Holacanthus leucopleura Blkr.
130 „ trimaculatus Lac. — Hab. Doreh.
131 „ Vroliki Blkr.
132 Acanthochaetodon imperator Blkr = Holacanthus imperator CV. — Hab. Sinus Humboldt.
133 „ semicirculatus Blkr = Holacanthus semicirculatus CV.
134 Platax teira CV. = Chaetodon teira Forsk. — Hab. Doreh.
135 „ vespertilio Cuv. = Platax Blochii CV. — Hab. Doreh.
136 Zanclus cornutus CV. — Hab. Doreh.

Sciaenoidei.

137 Pseudosciaena Goldmani Blkr = Johnius Goldmani Blkr. — Hab. Pulu Adi.

Sillaginoidei.

138 Sillago sihama Rüpp. = Sillago malabarica Cuv. — Hab. Doreh.

Mulloidei.

139 Upeneus tragula Rich. = Upenoides variegatus Blkr.
140 Mulloides zeylonicus Blkr = Upeneus zeylonicus CV.
141 Parupeneus barberinus Blkr = Upeneus barberinus CV.
142 „ cherserydros Blkr = Upeneus cherserydros CV.
143 „ crassilabris Blkr = Upeneus crassilabris CV.
144 „ luteus Blkr = Upeneus luteus CV. — Hab. sinus Redscar.
145 „ multifasciatus Blkr = Mullus multifasciatus QG. = Upeneus trifasciatus CV. — Hab. Doreh.
146 „ spilurus Blkr = Upeneus spilurus Blkr.

Pseudochromidoidei.

147 Pseudogramma polyacanthus Blkr = Pseudochromis polyacanthus Blkr. — Hab. Doreh.
148 Plesiops nigricans Rüpp. = Plesiops coeruleolineatus Rüpp. — Hab. Doreh.
149 Pseudoplesiops typus Blkr. — Hab. Doreh.

Pomacentroidei.

150 Premnas biaculeatus Blkr = Premnas unicolor, semicinctus, trifasciatus CV.
151 Prochilus bifasciatus Blkr = Amphiprion bifasciatus Bl. Schn.
152 „ melanopus Blkr. — Hab. Doreh.
153 „ percula Blkr = Amphiprion percula CV. — Hab. Doreh.
154 „ polylepis Blkr.
155 „ pesideraion Blkr = Amphiprion pesideraion Blkr. — Hab. Doreh.
156 „ polymnus Blkr = Amphiprion chrysargurus Rich. — Hab. Doreh.

157 Prochilus Rosenbergi Blkr = Amphiprion Rosenbergi Blkr. — Hab. Doreh.

158 Pomacentrus (Pomacentrus) pavo Lac. — Hab. Doreh.

159 „ (Pseudopomacentrus) melanopterus Blkr = Pomacentrus melanopterus Blkr. — Hab. Doreh.

160 „ (Pseudopomacentrus) moluccensis Blkr = Pomacentrus moluccensis Blkr. — Hab. Doreh.

161 „ (Pseudopomacentrus) trilineatus Blkr = Pomacentrus emarginatus CV. — Hab. Sin. Geelvink, Doreh.

162 Eupomacentrus (Brachypomacentrus) albifasciatus Blkr = Pomacentrus albifasciatus Schl. Mull. — Hab. or. sept.

163 Tetradrachmum arcuatum Cant. = Dascyllus aruanus CV. — Hab. Doreh.

164 „ melanurus Blkr = Dascyllus melanurus Blkr. — Hab. Doreh.

165 „ reticulatum Blkr = Dascyllus xanthosoma Blkr. — Hab. Doreh.

166 „ trimaculatum Blkr = Dascyllus trimaculatus, niger Rüpp. — Hab. Doreh.

167 Glyphidodon (Glyphidodon) bengalensis CV.

168 „ („) coelestinus CV. = Glyphidodon rahti CV. — Hab. Lakahia.

169 „ (Stegartes) lacrymatus Blkr = Glyphisodon lacrymatus QG. — Hab. Doreh.

170 Paraglyphidodon xanthurus Blkr = Glyphidodon xanthurus Blkr.

171 Glyphidodontops modestus Blkr = Glyphisodon modestus Schl. Müll. — Hab. Doreh.

172 „ antjerius Blkr = Glyphisodon antjerius K. v. H. — Hab. Doreh.

173 „ unimaculatus Blkr = Glyphisodon unimaculatus CV. — Hab. Doreh.

174 „ zonatus Blkr = Glyphisodon zonatus CV.

175 Chromis lepisurus Blkr = Heliases coeruleus et lepisurus Blkr an et CV.?

176 Chromis ternatensis Blkr = Heliases ternatensis Blkr. — Hab. Doreh.

Berycoidei.

177 Holocentrum argenteum CV.
178 „ binotatum QG.
179 „ caudimaculatum Rüpp. = Holocentrum leonoides Blkr. — Hab. Doreh.
180 „ diadema CV.
181 „ punctatissimum CV. — Hab. or. septentr.
182 „ rubrum Rüpp. = Holocentrum albo-rubrum Lac. — Holocentrum orientale CV. — Hab. Doreh.
183 „ sammara CV. — Hab. Doreh.
184 Myripristes Bleekeri Günth. = Myripristes pralinius CV? Blkr ol. — Hab. Doreh.
185 „ Pahudi Blkr.

Trachthyoidei.

186 Anomalops katoptron Blkr = Heterophthalmus katoptron Blkr. — Hab. Doreh.

Scorpaenoidei.

187 Parascorpaena bandanensis Blkr = Scorpaena bandanensis Blkr. — Hab. Doreh.
188 Scorpaenopsis diabolus Blkr = Scorpaena diabolus CV. — Hab. Doreh.
189 „ Novae-Guineae Blkr = Scorpaena Novae-Guineae CV.
190 „ oxycephalus Blkr = Scorpaena oxycephalus Blkr. — Hab. Doreh.
191 „ ? = Scorpaena papuensis CV. an = Scorpaenopsis oxycephalus Blkr?
192 Sebastopsis polylepis Gill = Scorpaenopsis polylepis Blkr. — Hab. Doreh.

193 Pseudomonopterus (Pterois) antennatus Blkr = Pterois antennata CV.
194 „ („) volitans Blkr = Pterois volitans CV. — Hab. Doreh.
195 „ Dendrochirus) zebra Blkr = Pterois zebra CV.

Synanceioidei.

196 Leptosynanceia asteroblepa Blkr = Synanceia asteroblepa Rich.

Crossodermatoidei.

197 Caracanthus apistus Blkr = Amphiprionichthys apistus Blkr. — Hab. Doreh.

Trigloidei.

198 Corystion orientale Blkr = Dactylopterus orientalis CV. — Hab. Doreh.

Platycephaloidei.

199 Platycephalus indicus Blkr = Platycephalus insidiator.
200 „ malayanus Blkr.
201 „ pristiger CV.

Pegasoidei.

202 Parapegasus natans L. = Pegasus natans L. = Pegasis pristis Blkr.

Syngnathoidei.

203 Hippocampus kuda Blkr = Hippocampus guttulatus Cuv.?
204 Gastrotokeus biaculeatus Heck. — Hab. Doreh.
205 Stigmatophora argus Kp.
206 Syngnathus gastrotaenia Blkr. — Hab. Doreh.
207 „ conspicillatus Ten. = Corythoichthys fasciatus Kp. — Hab. Doreh.

Amphisilenoidei.

208 Amphisile strigata Günth.

Aulostomatoidei.

209 Aulostoma chinense Lac. = Polypterichthys Valentyni Blkr. — Hab. Doreh.

Fistularioidei.

210 Solenostomus serratus Blkr = Fistularia immaculata Cuv. — Hab. Doreh.

Carangoidei.

211 Carangus hippos Blkr = Caranx Forsteri, Lessonii CV.
212 „ Quoyi Blkr = Caranx punctatus QG. = Caranx coeruleo-pinnatus CV. (nec Rüpp.)
213 Caranx Hasseltii Blkr = Selar Hasseltii Blkr. — Hab. Doreh.
214 „ Kuhli Blkr = Selar Kuhli Blkr. — Hab. Lakahia.
215 „ Novae-Guineae CV.
216 Citula armata Rüpp. = Carangoides armatus Blkr.

Serioloidei.

217 Seriola tapeinometopon Blkr.
218 Seriolichthys bipinnulatus Blkr. — Hab. Doreh.

Scomberoidei.

219 Scomber loo CV.
220 Auxis taso CV.

Echeneoidei.

221 Leptecheneis neucrates Gill = Echeneis neucrates L. — Hab. Lakahia.
222 Echeneis albescens Schl. — Hab. Doreh.

Lichioidei.

223 Scomberoides Sancti Petri Blkr.

Equuloidei.

224 Gazza equulaeformis Rüpp.

Teuthioidei.

225 Teuthis doliata Günth. = Amphacanthus doliatus CV. — Hab. Doreh.
226 „ lineata Günth. = Amphacanthus lineatus CV.
227 „ fuscescens Günth. = Amphacanthus fuscescens CV.
228 „ Kopsi Günth. = Amphacanthus Kopsi Blkr. — Hab. Doreh.
229 „ vermiculata Günth. = Amphacanthus vermiculatus CV.
230 „ vulpina Günth. = Amphacanthus vulpinus Mull. Schl. — Hab. Doreh.
231 „ marmorata Günth. = Amphacanthus marmoratus QG.
232 „ virgata Günth. = Amphacanthus virgatus CV.

Acanthuroidei.

233 Acanthurus ctenodon CV.
234 „ stugosus Benn.
235 Rhombotides celebicus Blkr = Acanthurus celebicus Blkr. — Hab. Doreh.
236 „ doreënsis Blkr = Acanthurus doreënsis CV.
237 „ lineatus Blkr = Acanthurus lineatus Lac. — Hab. Sinus Humboldt.
238 „ olivaceus Blkr = Acanthurus humeralis CV. — Hab. Sinus Humboldt.
239 „ triostegus Blkr = Acanthurus triostegus CV. — Hab. Doreh.
240 Paracanthurus hepatus Blkr = Acanthurus hepatus Bl. Schn. — Hab. Doreh.
241 Harpurus rhombeus Blkr = Acanthurus scopas CV. — Hab. Doreh.
242 „ Rüppelli Blkr = Acanthurus Rüppelli Blkr. — Hab. Doreh.
243 Acronurus melanurus Günth. = Acanthurus melanurus CV. — Hab. Doreh.
244 Naseus brevirostris CV.

245 Naseus lituratus CV. — Hab. Doreh.
246 „ thynnoides Blkr = Ascinurus thynnoides CV.

Tricanthoidei.

247 Triacanthus brevirostris Val. = Triacanthus rhodopterus Blkr. — Or. septentr.

Balistidoidei.

248 Balistes (Canthidermis) oculatus Swns = Balistes brevissimus Holl.
249 „ („) maculatus Blkr = Balistes maculatus Bl.
250 „ (Pseudobalistes) flavimarginatus Blkr = Balistes flavimarginatus Rüpp. — Hab. Musinama.
251 „ („) viridescens Blkr = Balistes viridescens Lac.
252 „ (Balistapus) aculeatus Blkr = Balistes aculateus Rl. — Hab. Doreh.
253 „ („) armatus Blkr = Balistes armatus Lac. — Hab. Doreh.
254 „ („) bursa Blkr = Balistes bursa Schn. — Hab. Doreh.
255 „ („) cinctus Blkr = Balistes cinctus Lac.
256 „ („) conspicillum Blkr = Balistes conspicillum Bl. Schn.
257 „ („) frenatus Blkr = Balistes frenatus Lac. — Hab. Doreh.
258 „ („) heteracanthus Blkr = Balistes heteracanthus Blkr. — Hab. Doreh.
259 „ („) lineatus Blkr = Balistes lineatus Bl. Schn. — Hab. Musinama.
260 „ („) verrucosus Blkr = Balistes verrucosus L. — Hab. Doreh.
261 Melichthys vidua Kp. = Balistes vidua Sol. = Hab. Doreh.
262 Erythrodon niger Rüpp. = Pyrodon niger Rüpp. — Hab. Doreh.

263 Liomonacanthus pardalis Blkr = Monocanthus pardalis Rupp.— Or. septentr.
264 Aluteres scriptus Blkr = Alutarius laevis Cuv. — Hab. Doreh.
265 „ monoceros Cuv. = Alutarius Berardi Less.
266 „ personatus Less.
267 Paruluteres prionurus Blkr = Alutarius prionurus Blkr.

Polynematoidei.

268 Trichidion microstoma Blkr = Polynemus microstoma Blkr.

Sphyraenoidei.

269 Sphyraena Forsteri CV.

Atherinoidei.

270 Atherina duodecimalis CV. — Hab. Doreh.
271 „ endrachtensis QG. CV.
272 „ lacunosa Forst. — Hab. Doreh.

Mugiloidei.

273 Mugil axillaris CV. — Hab. Doreh.
274 „ coeruleo-maculatus Lac.

Parapercioidei.

275 Parapercis hexophthalmus Blkr = Percis hexophthalmus — Hab. Doreh.
276 „ cylindrica Blkr = Percis cylindrica CV.
277 Malacanthus Hoedti Blkr. — Hab. Doreh.
278 „ latovittatus Blkr = Malacanthus taeniatus CV. — Hab. Doreh.

Gobioidei.

279 Ophiocara Hoedti Blkr = Eleotris Hoedti Blkr.
280 Gobiodon quinquestrigatus Blkr = Gobius ceramensis Blkr = Gobius et Gobiodon erythrophaios Blkr. — Hab. Doreh.
281 „ erythropilus Blkr = Gobius quinquestrigatus Blkr ol. (nec CV.) — Hab. Doreh.

282 Paragobiodon melanosoma Blkr = Gobius et Gobiodon melanosoma Blkr. — Hab. Doreh.
283 „ xanthosoma Blkr = Gobius et Gobiodon xanthosoma Blkr. — Hab. Doreh.
284 Amblygobius sphynx Blkr = Gobius sphynx CV.
285 Acentrogobius ornatus Blkr = Gobius elegans K. v. H. CV.
286 Ctenogobius criniger Blkr = Gobius criniger CV.
287 Bathygobius petrophilus Blkr = Gobius petrophilus Blkr. — Hab. Doreh.
288 „ nebulopunctatus Blkr = Gobius nebulopunctatus CV. — Hab. or. sept.
289 Oxyurichthys papuensis Blkr = Gobius papuensis CV.
290 Cryptocentrus papuensis Blkr = Gobius papuensis Peters (nec CV.)
291 Euchoristopus argentilineatus Blkr = Periophthalmus argentilineatus CV.
292 „ Koelreuteri Gill = Periophthalmus Koelreuteri CV.
293 Periophthalmodon ? = Periophthalmus Freycineti CV.
294 Taenioides anguillaris Blkr = Amblyopus Hermannianus Blkr pl. loc. (nec CV.) — Hab. Doreh.

Blennioidei.

295 Petroskirtes filamentosus Günth. = Petroskirtes rostratus Blkr.
296 Salarias Goesii Blkr. — Hab. Doreh.
297 „ lineatus CV. — Hab. Doreh.
298 „ melanocephalus Blkr. — Hab. Doreh.
299 „ sumatranus Blkr. — Hah. Doreh.
300 „ Sebae CV.

Ophioidei.

301 Fierasfer gracilis Blkr.

Pleuronecteoidei.

302 Pseudorhombus Russelli Günth. = Rhombus lentiginosus Rich.

Soleoidei.

303 Achirus Hartzfeldi Blkr. — Hab. Doreh.

Chironecteoidei.

304 Antennarius dorehensis Blkr. — Hab. Doreh.
305 „ nummifer Blkr. — Hab. Doreh.
306 „ oligospilus Blkr. — Hab. or. sept.
307 „ raninus Cant. — Hab. Doreh.

Siluroidei.

308 Arius (Hexanematichthys) leptaspis Blkr = Hexanematichthys leptaspis Blkr.

Chacoidei.

309 Chaca Buchanani Blkr = Chaca lophioides CV.? Kner.
310 Plotosus arab Blkr.

Sauridoidei.

311 Synodus synodus Blkr = Saurus synodus CV. — Hab. Doreh.
312 Saurida nebulosa CV.

Scombresocioidei.

313 Mastaccemblus strongylurus Blkr = Belone caudimacula Cuv.
314 Hemirhamphus Gaimardi CV.
315 „ Quoyi CV.
316 Exocoetus nigripennis CV. — Hab. or. septentr.

Pseudoclupeoidei.

317 Chanos salmoneus Günth.
318 Conorhynchus glossodon Blkr = Albula neoguinaica, seminuda CV.

Clupeoidei.

319 Clupea (Harengula) melanurus Blkr = Alausa melanurus CV.
320 Chirocentrus dorab CV.

Anguilloidei.

321 Muraena mauritiana Blkr = Anguilla mauritiana Benn.

Congeroidei.

322 Conger neoguinaicus Blkr. — Hab. Doreh.

Ophisuroidei.

323 Ophisurus colubrinus Rich. = Ophisurus fasciatus Lac. — Hab. Doreh.
324 Pisoodonophis boro Kp. — Hab. Doreh.

Gymnothoracoidei.

325 Gymnothorax flavimarginatus Blkr.
326 „ griseobadius Blkr.
327 „ isingleenoides Blkr.
328 „ pictus Blkr = Muraena pantherina Blkr. — Hab. Doreh.
329 „ tessellatus Blkr = Muraena tessellata Rich. — Hab. Doreh.
330 Strophidon polyodon Blkr.
331 Echidna variegata Forst.

Helmichthyoidei.

332 Leptocephalus taenia Less. — Hab. or. sept.

Ostraciontoidei.

333 Ostracion (Acanthostracion) arcus Blkr = Ostracion arcus Bl. = Ostracion cornutus Bl. (nec L.)
334 „ (Ostracion) punctatus Lac. — Hab. or. septent.
335 „ („) tetragonus L. = Ostracion cubicus Bl. —
336 „ („) Sebae Blkr. — Hab. Doreh.

Tetraodontoidei.

337 Diodon coeruleus QG. = Cyanichthys coeruleus Kp.

338 Paradiodon novemmaculatus Blkr = Diodon novemmaculatus CV. — Hab. Doreh.

339 Crayracion implutus Blkr = Tetraodon laterna Rich. = Arothron laterna Blkr. — Hab. Doreh.

340 „ mappa Blkr = Tetraodon mappa Less. = Anosmius mappa Blkr.

341 „ nigropunctatus Blkr. — Hab. Doreh.

Familia LABROIDEI.

Anampses (*Anampses*) *neoguinaicus* Blkr. Fig. 4.

An. corpore oblongo compresso, altitudine 4 circ. in ejus longitudine, latitudine 2 circ. in ejus altitudine, capite acutiusculo 4½ circ. in longitudine corporis, paulo longiore quam alto; oculis diametro 4 circ. in longitudine capitis, diametro 1 et paulo distantibus, minus diametro dimidio a linea rostro-frontali rectiuscula remotis; naribus parvis, posterioribus rimaeformibus, anterioribus brevissime tubulatis; dentibus maxillis cristalibus parum conspicuis, maxilla superiore anticis compressiusculis margine inferiore (externo) convexis margine superiore (interno) concavis apice sursum directis, maxilla inferiore anticis conicis apice antrorsum et paulo deorsum curvatis; dentibus pharyngealibus superioribus osse triquetro insertis compressis apice conicis curvatis acutiusculis; dentibus pharyngealibus inferioribus osse triangulari margine posteriore leviter concavo insertis corpore et crista ossis anteriore biseriatis, crista et corpore serie anteriore conicis obtusiusculis corpore serie posteriore ceteris majoribus compressis apice conicis curvatis; operculo et limbo praeoperculari subradiatim rugosulis; suboperculo laevi; squamis 28 circ. in linea laterali; linea laterali singulis squamis tubulo vulgo simplice vel leviter bifido notata; pinna dorsali spinis gracilibus leviter pungentibus postrorsum longitudine sensim accrescentibus posteriore corpore triplo circ. humiliore; dorsali radiosa dorsali spinosa paulo altiore convexa postice angulata; pectoralibus obtusiuscule rotundatis postice convexis, capite absque rostro longioribus; ventralibus valde acutis radiis

2 anterioribus ceteris conspicue longioribus pectoralibus non brevioribus; anali dorsali radiosa vix humiliore, convexa, postice angulata; caudali capite absque rostro non longiore convexiuscula angulis rotundata; colore capite superne et dorso antice fusco, cetero capite et corpore pulchre aurantiaco; iride aurea margine orbitali fusca; vitta sat lata subundulata oculo-operculari fuscescente-aurantiaca superne et inferne stria margaritacea limbata; capite lateribus mediis et inferne punctis sparsis ocelliformibus margaritaceis violaceo annulatis; membrana operculari postice fusca, medio stria verticali margaritacea; squamis thoraco-ventralibus et dorsalibus singulis ocello parvo margaritaceo vulgo profundiore annulato; squamis cetero corpore singulis vittula verticali margaritacea; pinna dorsali purpurea flavo marginata vittula intramarginali fusca, antice macula nigricante-fusca, tota longitudine punctis ocelliformibus numerosis margaritaceis violaceo annulatis; pinnis pectoralibus, ventralibus et caudali aurantiacis immaculatis; anali basi purpurescente, medio aurantiaca, inferne fusca flavo marginata, dimidio basali vittula longitudinali margaritacea, basi et dimidio libero guttulis et vittulis brevibus margaritaceis violaceo annulatis.

B. 6. D. 9/12 vel 9/13. P. 2/11. V. 1/5. A. 3/12 vel 3/13. C. 1/12/1 et lat. brev.

Hab. Nova-Guinea.

Longitudo speciminis descripti 140‴.

Rem. L'espèce est voisine de l'Anampses Cuvieri QG., mais se fait aisément reconnaître par la bande oculo-operculaire, par l'absence de bandelettes sur la dorsale, par les stries nacrées sur les écailles du tronc, etc.

Familia PERCOIDEI.

Pseudanthias hypselosoma Blkr. — Fig. 2.

Pseudanth. corpore oblongo compresso, altitudine 2½ circ. in ejus longitudine absque, 3⅓ ad 3¼ in ejus longitudine cum pinna

caudali; latitudine corporis 2 et paulo in ejus altitudine; capite obtuso non convexo, 3 circ. in longitudine corporis absque, 4 fere in longitudine corporis cum pinna caudali, aeque alto ac longo; linea rostro-dorsali capite rectiuscula nucha convexa; oculis diametro 4 fere in longitudine capitis, diametro 1 distantibus; rostro obtuso toto squamato; maxilla superiore maxilla inferiore paulo breviore, sub oculi dimidio posteriore desinente, 2 circ. in longitudine capitis; squamis supramaxillaribus ex parte squamis frontalibus majoribus; dentibus maxilla superiore pluriseriatis serie externa majoribus conicis antrorsum directis antice canino conico curvato antrorsum directo, seriebus internis brevissimis antice canino mediocri curvato; maxilla inferiore dentibus pluriseriatis serie externa ceteris conspicue majoribus posterioribus sursum et paulo antrorsum curvatis, utroque latere medio ramo canino parvo erecto paulo postrorsum curvato, syphysin versus caninis 2 vel 1 curvatis magnis sursum et extrorsum spectantibus; dentibus vomerinis in thurmam triangularem margine posteriore concavam, palatinis utroque latere in vittam gracillimam dispositis; praeoperculo subrectangulo angulo leviter rotundato, postice, angulo et inferne postice dentibus sat numerosis angularibus ceteris majoribus; limbo praeoperculi squamulato; suboperculo et interoperculo minutissime denticulatis; operculo spinis conspicuis 3 media ceteris longiore, superiore obtusa; squamis basi non squamulatis, praeoperculo et operculo 5 vel 6 in serie longitudinali, 45 circ. in linea laterali; squamis serie transversa sub parte dorsalis radiosae anteriore 19 circ., lineam lateralem inter et spinas dorsi medias 4; linea laterali antice valde adscendente et curvatura valde aperta caudam versus descendente, singulis squamis tubulo simplice notata; pinna dorsali spinosa spina producta nulla, spinis sat validis posterioribus 6 subaequilongis anterioribus longioribus corpore triplo circ. humilioribus, anterioribus 4 postrorsum longitudine accrescentibus; dorsali radiosa (ex parte) abrupta; pectoralibus rhomboideis apice rotundatis, capite vix brevioribus; ventralibus acutis pectoralibus paulo longioribus; spina capitis parte postoculari longiore, radio primo leviter producto analem

subattingente; anali (mutilata) spinis validis media ceteris longiore et fortiore spinis dorsi posterioribus non breviore, parte radiosa dorsali radiosa plus duplo breviore; caudali (mutilata) emarginata capite non vel vix longiore? colore corpore pinnisque roseo; iride flavescente; vittis specimine minus bene conservato conspicuis nullis.

B. 7. D. 10/16 vel 10/17. P. 2/15. V. 1/5. A. 3/7 vel 3/8. C. 1/13/1 et lat. brev.

Hab. Nova-Guinea.

Longitudo speciminis descripti 99‴.

Rem. Bien que la conservation de l'unique individu de cette espèce laisse beaucoup à désirer, on y reconnaît encore parfaitement les caractères spécifiques. L'espèce est voisine du Pseudanthias manadensis, mais ce dernier est bien distinct par son corps moins trapu, par son profil parabolique, par les yeux qui sont beaucoup plus grands, par les canines mandibulaires dont les symphysiales sont beaucoup plus faibles et les latérales par contre plus fortes, par un rayon de plus à la dorsale et deux de plus aux pectorales, etc.

Symphysanodon Blkr. — *Spariformium genus novum.*

Corpus oblongum. Caput superne, lateribus et inferne squamatum. Dentes maxillis pluriseriati, mandibulares anteriores conici obtusi antrorsum directi ceteris majores, ceteri parvi acuti. Dentes vomerini et palatini nulli. Maxillae squamatae, superior paulo deorsum protractilis antice profunde emarginata incisura edentula, inferior parte dentata postice angulatim elevata. Rictus mediocris obliquus. Labia tenuia. Praeoperculum denticulatum. Operculum postice biangulatum angulis spinaeformibus. Squamae ctenoideae, trunco 50 circ. in serie longitudinali. Inguines squama elongata. Pinnae dorsalis et analis infima basi vaginula squamosa humili ceterum alepidotae; dorsalis indivisa, parte spinosa parte radiosa vix longiore, spinis gracilibus 9 et radiis 10 vel 11;

analis spinis 3 et radiis 7. Pectorales acutae radiis subsuperioribus ceteris longioribus. Ventrales sub basi pectoralium insertae. Caudalis squamata radiis, mediis 4 exceptis, contiguis immobilibus, profunde emarginata, lobis gracilibus valde acutis. B. 7.

Rem. Le genre appartient au groupe des Pristipomatini (*Arch. néerl. des scienc. ex. et nat.*, T. XI, p. 270) et est des mieux caractérisés par la large échancrure intermaxillaire lisse, par la forme du bord dentaire du mandibulaire et par les neuf épines dorsales. C'est le seul genre du groupe où le nombre des épines dorsales reste au-dessous de dix [1]). La diagnose est facilitée encore par les caractères de l'écaillure supramaxillaire, des lobes très-grêles et très-pointus de la caudale, de sept rayons branchiostèges, de la longueur presque égale des parties osseuse et cartilagineuse de la dorsale, etc.

Symphysanodon typus Blkr. — Fig. 1.

Symphysan. corpore oblongo compresso, altitudine $3\frac{2}{3}$ circ. in ejus longitudine absque, $4\frac{5}{6}$ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis $1\frac{3}{4}$ circ. in ejus altitudine; capite acutiusculo $3\frac{1}{3}$ circ. in longitudine corporis absque, $4\frac{2}{5}$ circ. in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis $1\frac{1}{4}$ circ., latitudine capitis 2 circ. in ejus longitudine; linea rostro-frontali rostro antice convexa ante oculos concaviuscula; regione interoculari plana; oculis diametro $2\frac{2}{3}$ ad $2\frac{3}{4}$ in longitudine capitis, linea frontali approximatis, diametro $\frac{2}{3}$ circ. distantibus; naribns patulis distantibus ante mediam pupillam perforatis; rostro oculo duplo fere breviore acutiusculo apice convexo ante pupillae partem inferiorem sito: ossibus suborbitalibus humillimis; maxilla superiore maxilla inferiore paulo breviore, non ante rostrum prominente, sub pupillae dimidio posteriore desinente, symphysi incisura profunda mandibulae apicem recipiente, osse supramaxillari squamis

[1]) Je redresse ici une faute d'impression qui s'est glissée dans la diagnose du genre Plectorhynchus (*Arch. néerl. des scienc. ex. et natur.* T. XI, p. 271), où le nombre des épines dorsales est noté = „5 ad 14", ce qui doit être lu = 10 ad 14.

conspicuis imbricatis obtecto postice obtuse rotundato; maxilla inferiore inferne squamata; dentibus maxillis, serie externa ceteris conspicue longioribus anterioribus obtusiusculis vel obtusis ceteris acutiusculis; dentibus mandibularibus anterioribus ceteris majoribus obtusis ex parte antrorsum directis; dentibus pharyngealibus minutissimus acicularibus; ossibus pharyngealibus inferioribus liberis gracilibus; praeoperculo subrectangulo angulo leviter rotundato dentato-crenulato, limbo squamulato, ante limbum posteriorem squamis in series 4 vel 5 obliquas curvatas dispositis; operculo angulo spinis 2 parvis pungentibus inferiore superiore longiore; apertura branchiali usque sub medio oculo extensa; fascia squamarum temporali distincta nulla; squamis fronto-nuchalibus 25 circ. in serie longitudinali marginem oculi anteriorem inter et spinam dosi 1m; seriebus squamarum trunco longitudinalibus horizontaliter dispositis; squamis trunco angulum aperturae branchialis superiorem inter et basin pinnae caudalis in series 50 circ. transversas dispositis, lateribus antice quam postice et cauda majoribus; squamis 16 circ. in serie transversa basin ventralis inter et dorsalem, 4 in serie transversa lineam lateralem inter et spinas dorsales medias; linea laterali mediocriter curvata singulis squamis tubulo simplice notata; cauda parte libera duplo fere longiore quam postice alta; pinna dorsali, spinis mediocribus posterioribus subaequilongis corpore plus duplo humilioribus, parte radiosa parte spinosa vix altiore postice angulata; pectoralibus acutis capite absque rostro non brevioribus, radiis 3 vel 4 inferioribus gracilibus indivisis; ventralibus acutis pectoralibus non vel vix brevioribus; anali spinis sat validis 3a ceteris longiore, parte radiosa antice quam postice altiore obtusa radio 1o spina 3a vix longiore; caudali lobis gracilibus valde acutis longitudine caput subaequantibus radiis mediis plus duplo longioribus; colore corpore pinnisque dilute roseo; iride aurantiaco-flava; caudali lobo superiore apice macula lata fusca.

B. 7. D. 9/10 vel 9/11. P. 2/10/4 vel 2/11/3. V. 1/5. A. 3/7. C. 1/15/1 et lat. brev.

Hab. Nova-Guinea.

Longitudo speciminis descripti 151‴.

Familia MULLOIDEI.

Parupeneus spilurus Blkr. — Fig. 3.

Parup. corpore oblongo-subelongato compresso, altitudine $4\frac{2}{5}$ ad $4\frac{1}{2}$ in ejus longitudine, latitudine $1\frac{2}{3}$ ad $1\frac{3}{4}$ in ejus altitudine; capite acuto 4 ad 4 et paulo in longitudine corporis; altitudine capitis $1\frac{1}{4}$ ad $1\frac{1}{5}$ in ejus longitudine; oculis majore parte in capitis dimidio posteriore sitis, diametro 4 fero in longitudine capitis; linea rostro-frontali concava; linea interoculari leviter convexa; squamis capite superne usque infra nares anteriores descendentibus; rostro acuto superne tantum squamato, oculi diametro multo longiore; osse praeorbitali alepidoto oculi diametro altiore, tota altitudine tubulo aborescente porifero percurso; maxillis subaequalibus, superiore ante oculum vel sub oculi margine anteriore desinente, $2\frac{2}{3}$ circ. in longitudine capitis, duplo circ. longiore quam postice lata, postice squamata; dentibus maxillis conicis obtusiusculis inaequalibus; cirris hyoidalibus basi tantum rigidiusculis sub operculum attingentibus vel vix superantibus; praeoperculo subrectangulo angulo rotundato; operculo spinula acuta; squamis trunco ctenoideis, 30 circ. in linea laterali; linea laterali singulis squamis tubulo arborescente notata; cauda parte libera duplo fere longiore quam postice alta; pinna dorsali spinosa dorsali radiosa altiore corpore sat multo humiliore, spinis gracilibus flexilibus, 2a non vel vix pungente ceteris non vel vix crassiore, 3a ceteris longiore; dorsali radiosa et anali subaequialtis corpore duplo circ. humilioribus antice quam postice altioribus alepidotis, radio posteriore non producto, dorsali paulo longiore quam alta, anali aeque alta circ. ac longa; pectoralibus et ventralibus subaequilongis capite absque operculo non vel vix brevioribus; anali dorsali radiosa breviore spinis 2 debilibus non pungentibus anteriore brevissima; caudali lobis acutis capite paulo brevioribus; colore corpore superne et rostro roseo vel violascente-roseo, lateribus inferne et ventre roseo-margaritaceo; iride flava vel

aurantiaca; cauda superne antice macula magna lutea, medio dorsalem radiosam inter et basin pinnae caudalis macula rotunda violaceo-nigra non infra lineam lateralem descendente; pinnis roseis vel flavescente-roseis.

B. 4. D. 8—1/8 vel 8—1/9. P. 2/13 vel 2/14. V. 1/5. A. 2/6 vel 2/7. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Upeneus spilurus* Blkr, Verh. Bat. Gen. XXVI. N. nalez. ichth. Japan, p. 68 tab. 2 fig. 2; Günth. Cat. Fish. II, p. 406.

Hab. Nova-Guinea; Japonia (Nagasaki); in mari.

Longitudo 2 speciminum 160‴ et 175‴

Rem. M. Playfair (*Fish. Zanzib.* p. 41, tab. 5 fig. 3, 4) a fait connaître, sous le nom de Mullus dispilurus, une espèce voisine, mais à corps plus trapu, à profil convexe, à bord antérieur de l'orbite occupant le milieu de la longueur de la tête, à mâchoire supérieure plus courte, et qui se distingue encore par la position plus en arrière de la tache noirâtre de la queue. M. Day croit avoir retrouvé le dispilurus dans son Upeneus displurus (*Fish. India* p. 125 tab. 31 fig. 3), mais ce dernier me paraît distinct tant du dispilurus de M. Playfair que de l'espèce actuelle et pourrait être nommé *Parupeneus Dayi.*

Familia POLYNEMATOIDEI.

Trichidion microstoma Blkr. — Fig. 5.

Trichid. corpore oblongo compresso, altitudine 3 ad 3¼ in ejus longitudine absque, 4 ad 4⅓ circ. in ejus longitudine cum pinna caudali; latitudine corporis 2 ad 2 et paulo in ejus altitudine; capite 3 et paulo in longitudine corporis absque, 4 et paulo ad 4¼ in longitudine corporis cum pinna caudali; altitudine capitis 1¼ ad 1⅓ circ., latitudine capitis 2 fere ad vix plus quam 2 in ejus longitudine; linea rostro-frontali obtusangula; fronte inter oculos depressiuscula; oculis diametro 3 ad 3½ in longitudine capitis, diametro ¾ ad 1 distantibus; rostro oculo duplo circ.

breviore obtusiusculo rotundato, apice ante pupillam sito infra apicem oblique postrorsum truncato; naribus ante pupillam perforatis subaequimagnis; maxilla superiore post oculi marginem posteriorem desinente, $2\frac{1}{2}$ circ. in longitudine capitis; dentibus maxillis vittas graciles efficientibus non usque supra faciem mandibulae lateralem porrectis; dentibus palatinis utroque latere in vittulam gracillimam dispositis; dentibus vomerinis et pterygoideis nullis; praeoperculo subrectangulo, angulo membranaceo rotundato, margine posteriore conspicue et regulariter serrato junioribus tantum inferne dente ceteris majore; pseudobranchiis nullis; cauda parte libera postice altitudine $1\frac{1}{2}$ ad $1\frac{1}{3}$ in ejus longitudine; squamis 48 ad 50 in linea laterali, 16 circ. in serie transversa quarum 5 supra lineam lateralem; linea laterali parum curvata, singulis squamis tubulo simplice notata; pinnis dorsalibus subaequialtis corpore sat multo humilioribus, anteriore spinis valde gracilibus flexilibus vix pungentibus 3a ceteris longiore, posteriore paulo altiore quam longa, emarginata; pectoralibus capite absque rostro brevioribus, radiis liberis 5 superiore ceteris longiore capite absque rostro non ad paulo breviore; ventralibus longe post basin pectoralium insertis capitis parte postoculari paulo ad non longioribus; distantia spinam ventralem inter et spinam analem 1am capitis longitudine vix minore; anali forma, longitudine et altitudine dorsali radiosae subaequali, spinis pungentibus 3a radio 1o duplo ad plus duplo breviore; caudali lobis acutis capite non vel vix longioribus; colore corpore superne coerulescente aureo tincto inferne argenteo; iride flavescente vel aurantiaca, superne fusca; pinnis flavescentibus vel pallide roseis fusco minutissimo plus minusve arenatis; macula suprascapulari oblonga fusca initium lineae lateralis amplectente.

B. 7. D. 8—1/13 vel 1/4. P. 2/11 vel 2/12 + 5 liber. V. 1/5. A. 3/12 vel 3/13. C. 1/15/1 et lat. brev.

Syn. *Polynemus microstoma* Blkr, N. bijdr. ichth. Celeb., Nat. T. Ned. Ind. II, p. 216.

Polynemus plebejus Günth., Cat. Fish. II p. 329 (nec Brouss.).

Hab. Bali; Celebes; Sumbawa; Amboina; Ceram; Nova-Guinea; in mari.

Longitudo 13 speciminum 74‴ ad 190‴.

Rem. C'est cette espèce que M. Günth. (Catal. Fish. II p. 329) a indiquée sous le nom de Polynemus plebejus. Le plebejus de Broussonet cependant est bien distinct, tant par une formule différente de l'écaillure (lin. lat. 65 circ. l. transv. 8/13) que par son corps plus trapu et la présence de dents vomériennes. Il paraît que M. Günther n'a pas reconnu le vrai plejebus et qu'il l'a décrit comme espèce inédite sous le nom de Polynemus lineatus (Cat. II, p. 327) ou taeniatus (ib. II, p. 526). M. Day aussi a déjà rapporté le taeniatus au plebejus Brouss. (Fish. India p. 179), sans toutefois écarter dans la synonymie le plebejus de M. Günther. Ma description antérieure fut prise sur un petit individu mal conservé, qui ne permit pas d'y compter les écailles. Depuis, ma collection s'est enrichie de plusieurs individus de différentes parties de l'Insulinde. L'individu faisant partie de l'envoi du Muséum de Hambourg prouve que l'espèce habite aussi les côtes de la Nouvelle-Guinée. Ni cet individu ni aucun de ceux de mon cabinet n'ont des dents vomériennes, caractère qui indiquerait que le microstoma serait un Galeoides d'après la diagnose de M. Günther, mais dont la valeur générique ne saurait être admise.

La Haye, Octobre 1877.

SUR

QUELQUES CAS DE MOUVEMENT DANS UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE,

PAR

G. J. MICHAËLIS.

Les équations hydrodynamiques, dans la forme sous laquelle Euler les a données, sont:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial(\mathrm{V}-\mathrm{P})}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial(\mathrm{V}-\mathrm{P})}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\partial(\mathrm{V}-\mathrm{P})}{\partial z},\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(1)$$

u, v et w désignent les composantes de la vitesse d'une particule quelconque d'un fluide incompressible, suivant trois axes coordonnés fixes; V représente le potentiel des forces qui agissent sur le liquide; P est la pression au point considéré; la densité est prise égale à l'unité.

Outre leur mouvement progressif, les particules auront aussi, en général, un mouvement autour d'un axe. Si p, q et r sont les composantes de la vitesse angulaire, on a:

$$\left.\begin{aligned} 2p &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2q &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 2r &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

M. Helmholtz [1]) a demontré que si à un moment donné une molécule liquide ne possède pas de mouvement rotatoire, elle n'en prendra à aucun autre moment; et qu'une ligne, qui à un certain moment coïncide avec l'axe de rotation des molécules qu'elle coupe, coïncidera indéfiniment avec cet axe. Il a donné à une pareille ligne le nom de *ligne gyratoire*. L'ensemble des lignes gyratoires qui passent par les points du contour d'un élément de surface s'appelle *filet gyratoire*.

On peut étudier le mouvement des filets gyratoires qui passent constamment par les mêmes points du fluide. La théorie de ces mouvements est d'un grand intérêt, et on a surtout obtenu des résultats très remarquables en ce qui concerne les *anneaux gyratoires*.

Nous nous proposons d'établir ici quelques formules générales ayant rapport à ce sujet, et de montrer l'analogie qu'elles présentent avec les expressions qu'on trouve pour les actions magnétiques d'un courant électrique.

De la dernière des équations (1) il suit que u, v et w peuvent être exprimées en trois fonctions F, G et H par les équations

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

---

[1]) Borchardt's *Journal*, Band 55.

D'après (2), on a aussi

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} = 2p,$$

mais, en outre,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \text{ [1]};$$

par conséquent

$$\Delta F = -2p, \ \Delta G = -2q, \ \Delta H = -2r.$$

Si l'on prend maintenant en considération que les premiers coefficients différentiels des fonctions F, G et H sont continus dans l'espace entier et deviennent nuls à l'infini, on trouve pour les solutions de ces équations les valeurs

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{p\,dm}{\varrho}, \\ G &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{q\,dm}{\varrho}, \\ H &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{r\,dm}{\varrho}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

L'intégration doit être étendue sur tout l'espace qu'occupent les filets gyratoires. Dans ces formules, dm désigne l'élément de volume d'un filet gyratoire, et ϱ la distance de cet élément au point considéré.

La force vive du liquide est donnée par l'expression

$$T = \frac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left\{ u\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \right\} dm,$$

ou aussi

$$T = \int (Fp + Gq + Hr)\,dm \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Un courant électrique exerce, comme on sait, des actions

[1]) Kirchhoff, *Vorl. über math. Physik*, II Lieferung.

magnétiques. Le travail que produit la force magnétique le long d'une courbe fermée, à l'intérieur de laquelle se trouve le courant, est $4\pi s$, si s représente l'intensité du courant. On en a déduit [1]) que, en appelant u_1, v_1, w_1 les composantes d'un courant parallèlement aux axes des coordonnées, et λ_1, λ_2, λ_3 celles de la force qui est exercée sur un pôle magnétique, on a les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u_1 &= \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z}, \\ 4\pi v_1 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}, \\ 4\pi w_1 &= \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial z} = 0.$$

De la dernière de ces équations il résulte que λ_1, λ_2 et λ_3 peuvent être exprimées en trois fonctions F_1, G_1 et H_1 de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial z}, \\ \lambda_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial x}, \\ \lambda_3 &= \frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

En faisant usage des trois premières équations (6), on trouve, exactement de la même manière que pour les équations hydrodynamiques,

$$\Delta F_1 = -4\pi u_1, \quad \Delta G_1 = -4\pi v_1, \quad \Delta H = -4\pi w_1,$$

et comme, ici également, les fonctions F_1, G_1 et H_1, ainsi que leurs coefficients différentiels, doivent varier d'une façon continue dans l'espace entier et disparaître à l'infini, on trouvera aussi pour ces fonctions les solutions

---

[1]) Voir, entre autres, Maxwell, *On Electricity and Magnetism*, II.

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \int \frac{u_1\, dm}{\varrho}, \\ G_1 &= \int \frac{v_1\, dm}{\varrho}, \\ H_1 &= \int \frac{w_1\, dm}{\varrho}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

dm est l'élément du courant électrique, ϱ la distance de cet élément à un point déterminé de l'espace. L'énergie du système devient

$$T = \frac{1}{2}\int (F_1\, u_1 + G_1\, v_1 + H_1\, w_1)\, dm \quad \ldots\ldots (9)$$

Comme on le voit, un même traitement mathématique est nécessaire pour la solution des problèmes qui ont rapport aux mouvements gyratoires d'un fluide incompressible et pour celle des problèmes concernant les actions magnétiques du courant galvanique. Dans tous les cas où, pour les problèmes hydrodynamiques, on peut calculer les fonctions F, G et H, on peut aussi trouver, pour les problèmes électriques correspondants, les fonctions F_1, G_1 et H_1, dont la solution de ces problèmes dépend.

Lorsque les particules liquides n'ont à un certain moment aucune vitesse angulaire, elles n'en acquièrent jamais. Des équations (2) il suit alors

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

de sorte que les équations du mouvement prennent la forme simple

$$\left.\begin{aligned} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ V - P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + C, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

C est une grandeur qui est en général fonction du temps, mais qui ne dépend pas des coordonnées.

La détermination de la fonction φ (appelée par Helmholtz potentiel de la vitesse) se fait donc par la résolution de la dernière des équations (10).

Cette équation joue aussi un grand rôle dans la physique mathématique. Ordinairement on l'écrit ainsi:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Si l'on désigne par U le potentiel de la force attractive d'un corps en un point extérieur, on a aussi, d'après l'équation de Laplace,

$$\Delta U = 0.$$

Pareillement, le potentiel des forces électriques et magnétiques satisfait à cette même relation. L'équation fondamentale de ces branches de la physique étant ainsi identique à celle de l'hydrodynamique, il est évident que les solutions particulières montreront, en beaucoup de cas, une grande analogie. Nous allons signaler cette analogie là où elle se rencontre.

Examinons, en premier lieu, le mouvement du liquide dans l'hypothèse que ce mouvement soit entièrement emprunté à un corps solide et que, en outre, le liquide soit illimité.

A la surface du corps, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (la composante de la vitesse dans la direction de la normale) est alors donné, tandis que $\frac{\partial \varphi}{dx}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ doivent disparaître à l'infini, et avoir dans tout l'espace une valeur qui varie d'une manière continue. Dans ce cas, le potentiel de la vitesse, sauf une grandeur qui dépend du temps, est déterminé [1]).

Avant de chercher à calculer φ pour des circonstances particulières, considérons d'abord le coefficient différentiel du potentiel U de la force attractive d'un corps suivant un des axes des coordonnées. En supposant constante la densité m du corps, on trouve

[1]) Kirchhoff, *Vorl. über mathem. Physik*, p. 190.

$$U' = \frac{\partial U}{\partial x} = \int m \frac{dS}{\varrho} \, Cos\,(n\,x)\,; \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

où dS désigne l'élément de surface, et ϱ la distance de cet élément au point considéré. U' est le potentiel d'une masse qui s'étend uniformément, avec la densité $m \cos(n\,x)$, sur la surface.

Comme on le sait par la théorie des fonctions potentielles, $\frac{\partial U'}{\partial n}$ devient discontinu à la surface du corps et doit y satisfaire à la condition

$$\frac{\partial U'}{\partial n_u} + \frac{\partial U'}{\partial n_i} = 4\,\pi\,m\,Cos\,(n_u\,x) \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

La première de ces grandeurs est le coefficient différentiel relatif à la partie de la normale qui se trouve en dehors du corps, tandis que la seconde se rapporte à la partie située à l'intérieur du corps..

Supposons maintenant une sphère, qui se meuve dans un liquide illimité, avec la vitesse u_1 dans la direction de l'axe des x; d'après ce qui a été dit plus haut, le potentiel de la vitesse doit alors satisfaire à ces conditions: que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ soient continus et disparaissent à l'infini, et qu'à la surface de la sphère on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_1\,Cos\,(n\,x) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Toutes ces conditions se trouvent satisfaites par la solution

$$\varphi = C\,U' + \text{constante},$$

C étant une grandeur dont la valeur peut être déterminée au moyen de l'éq. (13) combinée avec (12). On obtient, en effet,

$$u_1\,Cos\,(n\,x) + C\,\frac{\partial U'}{\partial n_i} = 4\,\pi\,C\,Cos\,(n\,x),$$

si la densité du liquide est prise, comme précédemment, $= 1$. Mais, pour un corps sphérique, on a

$$U = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{R^3}{r},$$

en désignant par R le rayon de la sphère et par r la distance de son centre à un point (x, y, z). Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$C = \frac{3}{8\pi} u_1.$$

Il suit de là que, lorsqu'une sphère se meut avec une vitesse dont les composantes sont u_1, v_1 et w_1, le potentiel de la vitesse prend la forme

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^3}(u_1 x + v_1 y + w_1 z) + \text{constante} \ldots (14)$$

Rappelons-nous maintenant que, d'après la théorie de Poisson, le potentiel d'un corps qui est magnétisé uniformément avec l'intensité u_1, dans la direction de l'axe des x, est égal à $-u_1 U'$. On reconnaît alors que le potentiel de la vitesse d'un corps sphérique, qui se meut suivant une direction quelconque avec la vitesse S dans un liquide illimité, est égal à $-\frac{3}{8\pi}$ multiplié par le potentiel magnétique de cette sphère, supposée magnétisée suivant cette même direction avec l'intensité S.

Comme on a admis que le corps n'a pas de mouvement de rotation autour d'un axe, les composantes de la vitesse relative d'une molécule du liquide deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u_1, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v_1, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - w_1; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

et attendu que, dans le passage des coordonnées fixes au système mobile, que nous regardons ici comme lié au corps, α, β et γ sont les coordonnées de l'origine (le centre de la sphère), on a

$$u_1 = \frac{d\alpha}{dt}, \quad v_1 = \frac{d\beta}{dt}, \quad w_1 = \frac{d\gamma}{dt};$$

de sorte que les équations des trajectoires relatives deviennent

$$\left.\begin{aligned}
dx &= -\frac{R^3}{2r^3}\left\{\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)d\alpha - \frac{3xy}{r^2}d\beta - \frac{3xz}{r^2}d\gamma\right\} - d\alpha,\\
dy &= -\frac{R^3}{2r^3}\left\{-\frac{3xy}{r^2}d\alpha + \left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)d\beta - \frac{3yz}{r^2}d\gamma\right\} - d\beta,\\
dz &= -\frac{R^3}{2r^3}\left\{-\frac{3xz}{r^2}d\alpha - \frac{3yz}{r^2}d\beta + \left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)d\gamma\right\} - d\gamma.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Si dans ces équations on introduit des coordonnées polaires, par les substitutions

$$\begin{aligned}
x &= r\,Sin\,\chi.\,Cos\,\psi,\\
y &= r\,Sin\,\chi.\,Sin\,\psi,\\
z &= r\,Cos\,\chi,
\end{aligned}$$

les équations (16) se changent, à la suite de quelques réductions faciles à exécuter, en celles-ci:

$$\left.\begin{aligned}
dr &= \frac{R^3-r^3}{r^3}(Sin\chi.Cos\psi d\alpha + Sin\chi.Sin\psi d\beta + Cos\chi d\gamma),\\
rd\chi &= -\frac{R^3+2r^3}{2r^3}(Cos\chi.Cos\psi d\alpha + Cos\chi.Sin\psi d\beta - Sin\chi d\gamma),\\
r\,Sin\,\chi d\psi &= \frac{R^3+2r^3}{2r^3}(Sin\,\psi\,d\alpha - Cos\,\psi\,d\beta).
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Prenons maintenant le cas particulier où le centre de la sphère se meut dans un plan, de sorte qu'on ait, par exemple, $d\gamma = 0$, tandis que les coordonnées α et β sont exprimées, au moyen des formules

$$\alpha = \varrho\,Sin\,\chi_1,\quad \beta = \varrho\,Cos\,\chi_1,$$

en deux nouvelles variables; on obtient alors les équations différentielles des trajectoires sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}
dr &= \frac{R^3-r^3}{r^3}Sin\chi\,\{\varrho\,Cos(\chi_1+\psi)d\chi_1 + Sin(\chi_1+\psi)d\varrho\},\\
rd\chi &= -\frac{R^3+2r^3}{2r^3}Cos\chi\,\{\varrho\,Cos(\chi_1+\psi)d\chi_1 + Sin(\chi_1+\psi)d\varrho\},\\
rSin\chi d\psi &= \frac{R^3+2r^3}{2r^3}\{\varrho\,Sin(\chi_1+\psi)d\chi_1 + Cos(\chi_1+\psi)d\varrho\}.
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Les deux premières de ces équations, divisées l'une par l'autre, donnent

$$\frac{dr}{r\,d\chi} = -\frac{2(R^3 - r^3)}{R^3 + 2r^3}\,Tang\,\chi,$$

donc,

$$\int \frac{d\chi}{Cot\,\chi} = \int \frac{2r^3 + R^3}{2r(r^3 - R^3)}\,dr.$$

Cette intégration étant exécutée, on trouve

$$Cos\,\chi = C\sqrt{\frac{r}{r^3 - R^3}},$$

expression qui peut aussi être écrite de cette manière:

$$z^2\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = \text{constante} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Comme cette équation ne contient que deux variables, elle représente une surface de révolution, ayant l'axe des z pour axe de révolution.

Si, au lieu de $d\gamma = 0$, on fait $d\alpha = 0$ et $d\beta = 0$, ce qui revient à supposer que le centre de la spère se meut le long de l'axe des z, on voit par l'équation (17) que $d\psi = 0$, et que par conséquent l'équation des lignes de courant est, dans ce cas,

$$(x + y^2)\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = \text{constante}.$$

Elles rencontrent l'axe des z à l'infini, mais ne se coupent pas entre elles. Or, comme on a

$$d\gamma = \frac{1}{Cos\,\chi} \times \frac{r^3\,dr}{R^3 - r^3},$$

on trouve, pour le déplacement d'un point sur l'axe des z,

$$d\gamma = \frac{z^3\,dz}{R^3 - z^3},$$

ou, en intégrant,

$$\gamma-\gamma_0=\left[\frac{R}{3}\left\{\frac{1}{2}l(z^2+Rz+R^2)+\sqrt{3}Bg\,Tang\,\frac{R+2z}{R\sqrt{3}}-l(z-R)\right\}-z\right]_{z_0}^{z}, \quad (20)$$

z_0 désignant la position originelle du point considéré.

Supposons, en second lieu, que la sphère se meuve autour d'un axe fixe, parallèle à l'axe des x, et cherchons la forme que les lignes de courant affectent dans ce cas. Représentons la distance du centre de la sphère à l'axe de révolution par ϱ, et faisons coïncider cette droite avec l'axe des z. La vitesse relative d'une molécule du liquide a maintenant pour composantes

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$\frac{dy}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-(v+pz),$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+py.$$

Nous appellerons ϑ l'angle que ϱ fait avec la direction de cette droite à l'origine du mouvement. On voit qu'alors

$$v=\varrho\frac{d\vartheta}{dt} \text{ et } p=\frac{\partial\vartheta}{dt}.$$

Les équations des trajectoires relatives deviennent, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{3\varrho R^3 xy}{2r^5}d\vartheta,\\ dy&=\left\{\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)\frac{\varrho R^3}{2}-(\varrho+z)\right\}d\vartheta,\\ dz&=\left(\frac{3\varrho R^3 yz}{2r^5}+y\right)d\vartheta.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Introduisons de nouveau d'autres variables, par les substitutions

$$x=r\,Cos\,\chi,$$
$$y=r\,Sin\,\chi\,.\,Cos\,\psi,$$
$$z=r\,Sin\,\chi\,.\,Sin\,\psi,$$

Les lignes de courant sont alors déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned} d\,r &= \varrho \sin\chi \,.\, \cos\psi \,\frac{R^3 - r^3}{r^3}\, d\vartheta, \\ r\,d\chi &= -\,\varrho \cos\chi \,.\, \cos\psi \,\frac{R^3 + 2\,r^3}{2\,r^3}\, d\vartheta, \\ r \sin\chi\, d\psi &= \left\{ \varrho\, \frac{R^3 + 2\,r^3}{2\,r^3} \sin\psi + r \sin\chi \right\} d\vartheta, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (22)$$

En divisant l'une par l'autre les deux premières de ces équations, puis intégrant, on obtient, pour le cas où la sphère se meut autour d'un axe, la même relation que dans le cas précédent, à savoir

$$\cos\chi = C \sqrt{\frac{r}{r^3 - R^3}}\,.$$

En divisant ensuite la troisième équation par la première, on trouve

$$\frac{r \sin\chi\, d\psi}{d\,r} = \frac{R^3 + 2r^3}{2(R^3 - r^3)}\, \frac{\sin\psi}{\sin\chi \cos\psi} + \frac{r^4}{\varrho\,(R^3 - r^3) \cos\psi},$$

ou

$$\frac{d \sin\psi}{d\,r} = -\,\frac{2\,r^3 + R^3}{2\,r(r^3 - R^3) \sin^2\chi} \sin\psi - \frac{r^3}{\varrho \sin\chi (r^3 - R^3)} \qquad (23)$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qui peut être intégrée, parce que sin χ est exprimé en r. L'intégrale, toutefois, a une forme très compliquée.

Quand le problème donné est celui d'un ellipsoïde, se mouvant dans un fluide incompressible avec la vitesse u, suivant l'axe des x, qui coïncide avec l'un des axes principaux du corps, on peut démontrer la relation

$$\varphi = C\,U' + \text{constante},$$

où U' a la même signification que dans l'équation (11), et où C est une grandeur pouvant être déterminée au moyen de l'équation de condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_1 \cos(n\,x),$$

qui doit se vérifier à la surface du corps. Si l'on représente le potentiel de la force d'attraction qu'exerce l'ellipsoïde par la formule

$$U = \text{constante} - \pi (A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2),$$

on trouve pour C, en opérant comme on l'a fait dans le cas de la sphère, c'est-à-dire en combinant l'éq. (13) avec la condition ci-dessus, la valeur

$$C = \frac{u_1}{2\pi(2 - A_1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Dans le cas considéré, le potentiel de la vitesse est égal à $-\frac{1}{2\pi(2 - A_1)}$ multiplié par le potentiel magnétique du même ellipsoïde, supposé magnétisé uniformément dans la direction de l'axe des x, avec l'intensité u_1.

Les équations différentielles des trajectoires relatives des molécules du liquide s'établiront de la même manière que dans le cas de la sphère, et, tout comme dans ce cas, elles dépendront uniquement du chemin que parcourt le centre, lorsque le corps se déplace ou lorsqu'il tourne autour d'un axe fixe. Comme ces équations peuvent seulement être intégrées dans l'hypothèse d'un ellipsoïde de révolution animé d'un mouvement rectiligne, et que cette intégration a été effectuée plus d'une fois, nous renverrons, pour ce qui la concerne, à l'ouvrage déjà cité de M. Kirchhoff.

Lorsque c'est un corps de forme quelconque qui se meut dans un liquide indéfini, l'équation de condition, qui doit exister à la surface du corps, devient

$$\varphi = (u + zq - yr)\cos(nx) + (v + xr - zp)\cos(ny) + \\ + (w + yp - xq)\cos(nz); \ldots\ldots\ldots (26)$$

u, v et w désignant les composantes de la vitesse de l'origine du système mobile, et p, q et r celles de la vitesse angulaire du corps. On trouve pour le potentiel de la vitesse une fonc-

tion satisfaisant à toutes les condition requises, si l'on admet la relation

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 \text{ constante}, \quad (27)$$

où toutes les grandeurs φ_1, φ_2 etc. satisfont aux équations $\Delta\varphi_1 = 0$, $\Delta\varphi_2 = 0$, etc., disparaissent à l'infini en même temps que leurs coefficients différentiels, sont indépendantes du mouvement du corps, et donnent à la surface

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(nx), \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(ny), \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(nz), \\ \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\cos(nz) - z\cos(ny), \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z\cos(nx) - x\cos(nz), \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (28)$$

L'expression (27) est la même dans le système fixe des coordonnées que dans le système mobile. Uue fois φ calculé, la force vive du liquide peut être trouvée; car, de la signification du potentiel de la vitesse, il résulte immédiatement

$$2\,T' = \int\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dm = \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS; \quad (29)$$

dm étant l'élément du volume et dS un élément de la surface du corps. Comme, d'après nos suppositions, ces intégrales disparaissent à l'infini, elles n'ont besoin d'être étendues qu'à la surface du corps solide.

A l'aide de cette expression de la force vive, les équations du mouvement du corps peuvent être établies d'une manière très simple.

Pour distinguer les composantes du mouvement prises par rapport aux coordonnées fixes, des composantes prises par rapport aux axes mobiles, représentons les premières par u', v', w', etc., et les secondes par u, v, w, etc.; appelons en outre V le potentiel des forces; on a alors, d'après le principe de Hamilton

$$\frac{d\alpha}{dt}=u',\ \frac{d\beta}{dt}=v',\ \frac{d\gamma}{dt}=w',$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'}&=\frac{\partial V}{\partial \alpha},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'}=\beta\frac{\partial V}{\partial \gamma}-\gamma\frac{\partial V}{\partial \beta},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'}&=\frac{\partial V}{\partial \beta},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'}=\gamma\frac{\partial V}{\partial \alpha}-\alpha\frac{\partial V}{\partial \gamma},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w'}&=\frac{\partial V}{\partial \gamma},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r'}=\alpha\frac{\partial V}{\partial \beta}-\beta\frac{\partial V}{\partial \alpha},
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(30)$$

Les équations du mouvement par rapport aux axes liés au corps sont ordinairement plus faciles à résoudre, parce qu'elles renferment des coefficients constants. Pour les obtenir, on fera usage des relations

$$\frac{\partial T}{\partial u'}=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w},$$

$$\frac{\partial T}{\partial v'}=\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p'}=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}+\beta\frac{\partial T}{\partial v}-\gamma\frac{\partial T}{\partial w},$$

où α_1, β_1, γ_1 etc. sont, comme précédemment, les cosinus de direction.

Substituant ces valeurs, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial V}{\partial \alpha},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial V}{\partial \beta}.$$

etc.

En faisant maintenant coïncider, dans l'élément du temps que l'on considère, les deux systèmes de coordonnées, on a

$$\alpha_1=1,\qquad \beta_1=0,\qquad \gamma_1=0,$$
$$\alpha_2=0,\qquad \beta_2=1,\qquad \gamma_2=0,$$

etc.

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=0, \qquad \frac{d\alpha_2}{dt}=-r, \frac{d\alpha_3}{dt}=q,$$
$$\frac{d\beta_1}{dt}=r, \qquad \frac{d\beta_2}{dt}=0, \qquad \frac{d\beta_3}{dt}=-p,$$
$$\frac{d\gamma_1}{dt}=-q, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt}=p, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt}=0.$$

Et les équations du mouvement deviennent alors

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u}&=r\frac{\partial T}{\partial v}-q\frac{\partial T}{\partial w}+\frac{\partial V}{\partial \alpha},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v}&=p\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial \beta},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w}&=q\frac{\partial T}{\partial u}-p\frac{\partial T}{\partial v}+\frac{\partial V}{\partial \gamma},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}&=w\frac{\partial T}{\partial v}-v\frac{\partial T}{\partial w}+r\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial r}+L,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}&=u\frac{\partial T}{\partial w}-w\frac{\partial T}{\partial u}+p\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial p}+M,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}&=v\frac{\partial T}{\partial u}-u\frac{\partial T}{\partial v}+q\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial q}+N,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (31)$$

si, pour abréger, les composantes du couple sont représentées par L, M et N. M. Kirchhoff a intégré ces équations pour un corps de révolution qui n'est soumis à l'action d'aucune force [1]). Dans le cas général, l'intégration n'a pu être effectuée jusqu'ici.

Nous examinerons maintenant d'une manière spéciale le problème du mouvement simultané de plusieurs corps dans un liquide. Il convient d'adopter alors un système de coordonnées ayant une position fixe dans l'espace. Si nous appelons u_1, v_1, et w_1, etc. les composantes du mouvement du premier corps, et u_2, v_2, w_2, etc. celles du second, un point quelconque du premier aura pour composantes de sa vitesse

$$u_1 + r_1 y_1 - q_1 z_1, \text{ etc.}$$

---

[1]) *Journal von Crelle*, t. 71.

et, de même, un point quelconque de l'autre corps aura les composantes

$$u_2 + r_2 y_2 - q_2 z_2, \text{ etc.}$$

Soit de nouveau φ le signe du potentiel de la vitesse. Cette fonction doit satisfaire aux conditions suivantes: ses coefficients différentiels suivant les axes des coordonnées sont continus dans tout l'espace et disparaissent à l'infini; à la surface des corps $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ est donné, et les équations de condition sont entièrement analogues aux conditions (28) nécessaires dans le cas d'un corps unique. On trouvera maintenant

$$\varphi = \Sigma(u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6) + \text{constante} \quad . \quad (32)$$

Les fonctions φ_1, φ_2 etc. sont, ici encore, indépendantes des composantes du mouvement des corps, mais sont déterminées, à un moment donné, par la forme et la distance mutuelle de ces corps. Elles ont en général pour chaque surface une forme différente. Lorsque ces fonctions ont été trouvées, on peut en déduire la force vive; et les équations différentielles du mouvement deviennent alors, en vertu du principe de Hamilton,

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d\alpha'}{dt} = u_1, & \frac{d\beta'}{dt} = v_1, & \frac{d\gamma'}{dt} = w_1, \\ \frac{d\alpha''}{dt} = u_2, & \frac{d\beta''}{dt} = v_2. & \frac{d\gamma''}{dt} = w_2, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\partial T}{\partial \alpha'} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_2} = \frac{\partial T}{\partial \alpha''} + \frac{\partial V}{\partial \alpha''};$$

etc. etc.

où V désigne de nouveau le potentiel des forces qui agissent sur le corps, et T. la force vive.

Dans le cas d'un nombre quelconque de sphères, dont R_1, R_2, R_3, etc. sont les rayons, et qui se meuvent dans le liquide avec les vitesses S_1, S_2, S_3, etc., on aurait, d'après ce qui précède, si la première sphère se trouvait seule,

$$\varphi' = \frac{R_1^3}{2} S_1 \frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn};$$

et si la seconde était seule

$$\varphi'' = \frac{R_2^3}{2} S_2 \frac{d\left(\frac{1}{r_2}\right)}{dn}.$$

Lorsque les corps se déplacent simultanément, le calcul exact du potentiel de la vitesse se fait par la théorie des fonctions sphériques. Pour une première approximation, toutefois, on a, en un point quelconque de la masse fluide,

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \text{etc.}$$

Si les rayons des sphères sont infiniment petits par rapport à la distance de leurs centres, cette valeur de φ, dans tous les points situés à une distance finie des surfaces, sera exacte à des quantités infiniment petites près. La force vive du fluide deviendra alors

$$T' = \frac{1}{2}\int (\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \text{etc.}) \frac{\partial(\varphi' + \varphi'' + \text{etc.})}{\partial n} dS,$$

valeur où l'intégration doit être étendue sur la surface de tous les corps.

Or, on a

$$\frac{1}{2}\int \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS = \frac{\pi}{3} R_1^3 S_1^3,$$

$$\frac{1}{2}\int \varphi'' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} dS = \frac{\pi}{3} R_2^3 S_2^3.$$

etc.

On sait, en outre, que

$$\int \varphi' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} dS = \int \varphi'' \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS',$$

d'après le théorème de Green.

A la surface de la première sphère, on a

$$\varphi' = -\frac{R_1}{2}\{u_1 \cos(n\,x) + v_1 \cos(n\,y) + w_1 \cos(n\,z)\},$$

et aussi

$$\frac{\partial \varphi''}{\partial n} = \frac{R_2{}^3}{2}\left\{u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \cos(n\,x) + u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(n\,y) + \right.$$
$$\left. + u_2 \frac{\partial_2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \cos(n\,z) + v_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(n\,x) + \text{etc.}\right\};$$

équation où, dans l'hypothèse que les rayons des sphères sont infiniment petits, on peut prendre pour r la distance des centres.

L'intégration donne, comme on le voit immédiatement,

$$\int \varphi' \frac{\partial \varphi''}{\partial n} dS = \frac{\pi}{3} R_1{}^3 R_2{}^3 \left\{ u_1 u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \right.$$
$$+ (v_1 w_2 + v_2 w_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + v_1 v_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + (w_1 u_2 + w_2 u_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} +$$
$$\left. + w_1 w_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \right\} \quad \ldots . \quad (34)$$

Les distances mutuelles des centres de toutes les sphères étant r_{12}, r_{13}, r_{23}, etc., on trouve pour la force vive la formule suivante

$$T' = \frac{\pi}{3}\left\{\sum_1^n R^3 S^3 + \Sigma R_m^3 R_n^3 \left[u_m u_n \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{mn}}}{\partial \alpha^2} + \text{etc.}\right]\right\} . \quad (35)$$

Sous le second signe Σ on doit prendre toutes les combinaisons deux à deux, sans répétition des différents indices m, n.

Si, pour abréger, l'expression placée sous le second signe Σ est représentée par V, on peut écrire

$$\begin{aligned} V = {} & u_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial \alpha} + v_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial \beta} + w_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial \gamma} + \\ & + u_1 \frac{\partial P_{13}}{\partial \alpha} + v_1 \frac{\partial P_{13}}{\partial \beta} + w_1 \frac{\partial P_{13}}{\partial \gamma} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_2 \frac{\partial P_{23}}{\partial \alpha} + v_2 \frac{\partial P_{23}}{\partial \beta} + w_2 \frac{\partial P_{23}}{\partial \gamma} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

où

$$P_{12} = \frac{\pi}{3} R_1{}^3 R^3{}_2 \left(u_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \alpha} + v_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \beta} + w_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \gamma} \right),$$

$$P_{13} = \frac{\pi}{3} R_1{}^3 R_3{}^3 \left(u_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \alpha} + v_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \beta} + w_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \gamma} \right).$$

En supposant, de plus, que toutes les vitesses soient constantes, on trouve sans peine que la force, qui agit sur la première sphère dans la direction de l'axe des x, peut être représentée ainsi:

$$\begin{aligned} X = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big(& u_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial \alpha} + v_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial \beta} + w_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial \gamma} + \\ & + u_3 \frac{\partial P_{13}}{\partial \alpha} + v_3 \frac{\partial P_{13}}{\partial \beta} + w_3 \frac{\partial P_{13}}{\partial \gamma} + \text{etc.} \Big) \quad . \; . \; (36) \end{aligned}$$

Cette force est complétement indépendante du mouvement du premier corps. Des formules analogues s'obtiennent pour les autres composantes des forces. Lorsqu'il n'y a que deux corps sphériques, la force que l'un d'eux exerce sur l'autre (voir Kirchhoff, à l'endroit cité) a la même grandeur, mais en sens opposé, que la force avec laquelle une molécule magnétique placée au centre de la première sphère agit sur une molécule semblable placée au centre de la seconde; les axes magnétiques sont alors parallèles à la direction du mouvement du premier corps, et les moments magnétiques sont égaux au produit de la vitesse de ce corps par les quantités

$$R_1^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad R_2^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Si les deux sphères se meuvent dans la même direction, suivant la droite qui joint leurs centres, la force devient

$$\frac{2\pi R_1{}^3 R_2{}^3}{r^4} S_2{}^2.$$

Mais si elles se déplacent perpendiculairement à la ligne des centres, la seconde sphère attire la première avec la force

$$\frac{\pi R_1{}^3 R_2{}^3}{r^4} S_2{}^2.$$

Les mêmes formules sont applicables lorsqu'une sphère se meut parallèlement ou perpendiculairement à une paroi fixe; parce que, comme nous l'avons vu, la vitesse de la première sphère n'entre pas dans les formules, et peut par conséquent être prise égale à zéro.

Supposons maintenant encore que l'un des corps sphériques soit en repos, et que le centre de l'autre exécute de petites oscillations autour de la position d'équilibre, suivant l'axe des x.

On a alors

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0;$$

en outre,

$$u_2 = A \frac{2\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi}{\tau} t;$$

et par suite

$$\frac{d u_2}{d t} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} A \sin \frac{2\pi}{\tau} t,$$

si A représente la demi-amplitude de la vibration et τ la durée de la vibration.

Des équations du mouvement, nous ne prenons en considération que celle-ci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\partial T}{\partial \alpha'} + X,$$

qui fait connaître la force exercée par la sphère mobile sur la sphère en repos.

Or, on a

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\pi}{3} R_1{}^3 R_2{}^3 u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = 0;$$

valeurs dont la substitution donne

$$X = \frac{4\pi^3 R_1{}^3 R_2{}^3 A}{\tau^2}\left\{A\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial\alpha^3}\cos^2\frac{2\pi}{\tau}t - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\alpha^2}\sin\frac{2\pi}{\tau}t\right\}.$$

Nous pouvons aussi déduire de cette équation la valeur moyenne de la force qui agit sur la sphère immobile. La valeur moyenne de $\sin\frac{2\pi}{T}t$, pendant n vibrations entières, est

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sin\frac{2\pi}{\tau}t\,dt = 0.$$

De même, on trouve pour la valeur moyenne de $\cos^2\frac{2\pi}{\tau}t$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt = \frac{1}{2};$$

de sorte que la grandeur cherchée devient

$$\frac{2\pi^3 R_1{}^3 R_2{}^3 A^2}{\tau^2}\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial\alpha^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

On voit que la valeur moyenne de la force en question est proportionnelle au carré de l'amplitude et en raison inverse du carré de la durée de la vibration.

Pour un ellipsoïde qui se meut sans vitesse angulaire dans un liquide, on a

$$\varphi' = \frac{1}{2\pi(2-A_1)}\frac{\partial U_1}{\partial\alpha}u_1 + \frac{1}{2\pi(2-B_1)}\frac{\partial U_1}{\partial\beta}v_1 + \frac{1}{2\pi(2-C_1)}\frac{\partial U_1}{\partial\gamma}w_1,$$

ainsi, qu'on l'a montré plus haut.

Si dans le même liquide se meut encore un second ellipsoïde, dont le potentiel de la vitesse soit donné par l'équation

$$\varphi'' = \frac{1}{2\pi(2-A_2)}\frac{\partial U_2}{\partial\alpha}u_2 + \frac{1}{2\pi(2-B_2)}\frac{\partial U_2}{\partial\beta}v_2 + \frac{1}{2\pi(2-C_2)}\frac{\partial U_2}{\partial\gamma}w_2,$$

on peut de nouveau, en supposant les corps infiniment petits par rapport à leur distance, poser, dans une première approximation, pour le potentiel de la vitesse résultant du mouvement simultané des deux corps,

$$\varphi = \varphi' + \varphi''.$$

La force vive du liquide se laisse calculer, comme précédemment, par la formule

$$T' = \frac{1}{2}\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\,S,$$

prise sur les surfaces des deux corps. En exécutant cette intégration, on est conduit à la formule suivante pour la force vive du liquide:

$$\begin{aligned}
T' = {} & \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{A_1}{2-A_1} u_1^2 + \frac{B_1}{2-B_1} v_1^2 + \frac{C_1}{2-C_1} w_1^2\right) + \\
& + \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{A_2}{2-A_2} u_2^2 + \frac{B_2}{2-B_2} v_2^2 + \frac{C_2}{2-C_2} w_2^2\right) + \\
& + \frac{M_1}{2\pi}\left\{\frac{A_1}{(2-A_1)(2-A_2)} u_1 u_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_1}{(2-B_1)(2-B_2)} v_1 v_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} + \right. \\
& + \frac{C_1}{(2-C_1)(2-C_2)} w_1 w_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2} + \left(\frac{A_1}{(2-A_1)(2-B_2)} u_1 v_2 + \frac{B_1}{(2-A_2)(2-B_1)} u_2 v_1\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \\
& + \left(\frac{A_1}{(2-A_1)(2-C_2)} u_1 w_2 + \frac{C_1}{(2-C_1)(2-A_2)} u_2 w_1\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma} + \\
& \left. + \left(\frac{B_1}{(2-B_1)(2-C_2)} v_1 w_2 + \frac{C_1}{(2-C_1)(2-B_2)} v_2 w_1\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma}\right\}.
\end{aligned}$$

Dans ces formules, M_1 et M_2 sont les volumes des deux ellipsoïdes donnés. Dans les coefficients différentiels $\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha_2}$ etc., on doit prendre pour U_2 la valeur que cette grandeur possède au centre du premier des deux corps. Calculons maintenant la force que l'un de ces corps exerce sur l'autre, lorsqu'ils se meuvent tous les deux avec une vitesse constante.

En introduisant la valeur obtenue pour la force vive dans l'équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\partial T}{\partial \alpha} + X,$$

on peut trouver l'action exercée, dans la direction de l'axe des x, par le second ellipsoïde sur le premier.

Or, on a

$$\frac{\partial T'}{\partial u_1} = \frac{A_1 M_1}{(2-A_1)} u_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e_1 e_2 u_2 \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} + e_1 f_2 v_2 \frac{\partial U_2}{\partial \beta} + e_1 g_2 w_2 \frac{\partial U_2}{\partial \gamma}\right),$$

en employant, pour abréger, les notations $e_1 e_2$, $e_1 f_2$, etc. pour les coefficients des produits $u_1 u_2$, $u_1 v_2$, etc. Il vient alors:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{ & e_1 e_2 \left(u_1 u_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2} + v_1 u_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + w_1 u_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma}\right) + \\ & + e_1 f_2 \left(u_1 v_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + v_1 v_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} + w_1 v_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma}\right) + \\ & + e_1 g_2 \left(u_1 w_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma} + v_1 w_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma} + w_1 w_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2}\right) - \\ & - e_1 e_2 \left(u_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2} + v_2 u_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + w_2 u_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma}\right) - \\ & - e_1 f_2 \left(u_2 v_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + v_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} + w_2 v_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma}\right) - \\ & - e_1 g_2 \left(u_2 w_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma} + v_2 w_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma} + w_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2}\right)\Big\},\end{aligned}$$

et ensuite, comme il est facile de s'en assurer,

$$\begin{aligned}X = \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{ & v_1 u_2 (e_1 e_2 - e_2 f_1) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + w_1 u_2 (e_1 e_2 - e_2 g_1) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma} + \\ & + v_1 v_2 (e_1 f_2 - f_1 f_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} + w_1 v_2 (e_1 f_2 - f_2 g_1) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma} + \\ & + v_1 w_2 (e_1 g_2 - g_2 f_1) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma} + w_1 w_2 (e_1 g_2 - g_2 g_1) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2} - \\ & - u_2^2 e_1 e_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2} - v_2^2 e_1 f_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} - w_2^2 e_1 g_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2} - \\ & - u_2 v_2 (e_1 e_2 + e_1 f_2) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} - u_2 w_2 (e_1 e_2 + e_1 g_2) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma} - \\ & - v_2 w_2 (e_1 f_2 + e_1 g_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma}\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)\end{aligned}$$

Les expressions des autres forces s'obtiendront d'une manière analogue. La force qui agit sur le premier ellipsoïde n'est plus, comme dans le cas de la sphère, indépendante du mouvement de ce corps. Mais la composante de cette force suivant l'axe des x est encore indépendante du mouvement du premier ellipsoïde dans la direction de cet axe.

LA DÉTERMINATION NUMÉRIQUE

DU

POUVOIR DE DISTINGUER LES COULEURS,

PAR

F. C. DONDERS.

L'affection appelée *cécité pour les couleurs* consiste, comme on le sait, dans l'absence totale ou partielle de la faculté de distinguer les couleurs ou certaines d'entre elles. Au point de vue de la théorie, aussi bien qu'à celui de la pratique, il importe de déterminer avec précision le degré de ce trouble visuel, en d'autres termes, d'évaluer numériquement, pour chaque couleur, le pouvoir de distinction. Je me propose de faire connaître ici, avec quelques détails, une méthode que j'ai déjà indiquée sommairement il y a plus de deux ans (*Aanteekeningen*, *Utrechtsch Genootschap*, 25 juin 1875).

Le point de départ de mes recherches a été fourni par la question de savoir quelles conditions il fallait imposer au personnel des chemins de fer en ce qui concerne l'appréciation des signaux. Ces signaux consistent principalement, pendant le jour, en drapeaux blancs, rouges ou verts, vus à la lumière incidente, et pendant la nuit, en lumières vues à travers des verres incolores, rouges ou verts.

On obtient une détermination numérique en indiquant la limite à laquelle une couleur, ou nuance de couleur, se laisse encore reconnaître ou distinguer avec certitude. Cette limite peut être cherchée *a.* dans l'intensité lumineuse, *b.* dant la saturation et *c.* dans l'angle visuel. Pour *l'intensité lumineuse* et la *saturation*, on peut la trouver par la comparaison, — appliquée sous des circonstances identiques à l'œil examiné et à un œil normal, — d'anneaux de secteurs gris et colorés, produits *respectivement* sur un disque rotatif noir ou blanc. Mais, sous le rapport de la

simplicité, ces méthodes cèdent le pas à celle qui est fondée sur *l'angle visuel.* Celle-ci paraissait, en outre, se recommander à priori pour l'objet que j'avais en vue, attendu que l'aptitude du personnel des chemins de fer doit être jugée d'après la distance à laquelle, — ou l'angle sous lequel, — les signaux sont reconnus. Dans l'application, cette méthode a parfaitement répondu au but.

L'absence complète du pouvoir de distinguer telle ou telle couleur est relativement rare: des couleurs saturées, bien éclairées et vues sous un angle visuel assez grand, sont reconnues par la plupart de ceux qui sont dits aveugles pour les couleurs. Mais l'imperfection du sens des couleurs est plus commune qu'on ne se le figure généralement. En avançant vers un objet coloré de faibles dimensions, l'œil normal distingue la couleur un instant après qu'il a perçu la lumière: on n'aura pas à chercher beaucoup pour trouver quelqu'un qui ne voie la couleur que longtemps après la lumière. C'est là-dessus que repose la méthode que j'ai suivie.

Dans les expériences à la *lumière incidente*, j'ai employé des petits disques de papier à fleurs, larges de 1, 2, 5 mm. ou plus, qui étaient collés chacun séparément sur un petit morceau de velours noir, — quelquefois aussi des disques semblables faits de l'étoffe des drapeaux-signaux, blancs, rouges et verts. Il suffit de presser lesdits morceaux sur du velours, pour qu'ils y adhèrent, et c'est ainsi que je les fixais, soit un à un, soit en grand nombre à la fois, sur un grand coupon, — un mètre environ de la largeur entière de la pièce, — attaché au mur.

Le *pouvoir de distinction des couleurs*, K, est maintenant en raison inverse de la quantité de lumière exigée, donc proportionnel au carré d^2 de la distance à laquelle les couleurs sont distinguées, et inversement proportionnel au carré m^2 du diamètre. Si D est la distance à laquelle l'œil normal perçoit la couleur pour $m = 1$ (c'est-à-dire, pour des disques de 1 mm. de diamètre), on a

$$K = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{d^2}{D^2}.$$

On trouve pour l'œil normal $K = 1$, et pour tout autre œil $K < 1$.

Dans la formule de l'acuité visuelle, $S = \frac{d}{D}$, les distances entrent simplement comme d et D (non comme d^2 et D^2), parce que la perceptibilité d'un signe littéral est proportionnelle à l'angle visuel, suivant chaque dimension. En outre, dans cette formule, D a été regardé comme constant. Cela était permis, parce que, pour les variations ordinaires de la clarté du jour, dans un local convenable, S n'en conserve pas moins à peu près son maximum. En ce qui concerne la perception des couleurs, il n'en est plus ainsi au même degré. Sans doute, la diminution d'intensité lumineuse est compensée en partie par l'augmentation de sensibilité de la rétine et par la dilatation de la pupille; mais, à mesure que croît la clarté du jour, la perception des couleurs est pourtant facilitée d'une manière très appréciable, et il est bon, en conséquence, que celui qui préside à l'examen détermine aussi chaque fois sa propre valeur de D et en tienne compte. Du reste, dans la détermination de l'acuité visuelle, nous prenons également en considération la faiblesse de l'éclairement, lorsqu'elle réduit sensiblement l'acuité de notre propre vue. Quand il s'agit du sens des couleurs, cela est d'autant plus nécessaire qu'on ne peut pas toujours et partout se procurer les mêmes couleurs types, que toutes les couleurs disponibles ne se reconnaissent pas à la même distance et que par l'usage elles perdent de leur fraîcheur. En règle générale, toutefois, on peut bien admettre que des couleurs vives et passablement saturées, vues avec un diamètre de 1 mm., sous un bon éclairement et sur un fond de velours noir, sont reconnues à une distance de 5 mètres par un œil jouissant de sa pleine acuité visuelle, à la condition, toujours nécessaire, de corriger l'amétropie éventuelle.

La méthode suppose que le sens des couleurs est normal chez l'observateur lui-même, ce que la comparaison avec d'autres peut mettre promptement en évidence. Il faut en outre que l'observateur et la personne à examiner, avant la détermination, soient restés quelque temps sous l'influence du même éclairement, — dans la même chambre. La lumière du jour émousse la vue pour toutes les couleurs, mais non pour toutes au même degré:

c'est ainsi que, de toutes les couleurs, le bleu exige pour être perçu le moins de lumière, quand on sort de l'obscurité, mais le plus, quand on vient du jour. Je me propose de revenir plus tard sur ce côté de mes recherches, auquel d'autres questions se rattachent.

Pour la *lumière transmise*, je me suis servi d'une bougie normale ordinaire, telle qu'on l'emploie en Angleterre pour la détermination de l'intensité lumineuse des flammes de gaz. Elle est placée derrière un écran en bois noir, à ouverture ronde de 25 mm. de diamètre, fermée par un verre dépoli, devant lequel peut glisser une plaque métallique percée de petits trous de 1, 2, 5, 10 et 20 mm. Immédiatement derrière l'ouverture se trouve un disque rotatif, pourvu de plusieurs trous, qui peuvent être amenés à volonté en face de l'ouverture, et dont l'un est libre, tandis que les autres contiennent des verres diversement colorés, notamment le verre rouge et le verre vert des lumières-signaux des chemins de fer. La bougie peut se mouvoir le long d'une échelle, qui indique la distance a de la flamme à l'écran. Le verre rouge laisse passer la plupart des rayons du rouge jusque dans l'orangé, aucun autre; le verre vert transmet une partie des rayons du jaune au vert-bleuâtre, et en outre quelques rayons rouges. Dans ces expériences, la lumière du jour doit être interceptée en majeure partie, de manière à ne laisser pénétrer dans la chambre qu'une faible lueur, permettant de se reconnaître encore au voisinage l'un de l'autre. On peut maintenant déterminer pour l'œil normal la distance A qui, pour la lumière blanche et la lumière colorée, et avec $m = 1$, correspond à $D = 5$ mètres. Pour cette distance, D prend alors dans la formule la valeur passablement constante de 5 mètres. Avec la bougie normale et avec le verre dépoli et bien douci dont je faisais usage, j'ai trouvé pour la lumière blanche de la flamme $A = 1^m,75$, pour la lumière rouge $A = 0^m,65$, pour la lumière verte $A = 0^m,25$. Quand on opère ainsi à la lumière transmise, il faut avoir soin que l'ouverture soit vue à peu près dans la direction de la bougie. L'examen se fait du reste comme à la lumière incidente. Lorsqu'il y a cécité des couleurs, le degré de

clarté, avec les valeurs respectives de A, n'est plus égal pour les différentes couleurs, et les personnes examinées cherchent alors ordinairement dans cette différence de clarté le critère de la couleur. Cela ressort de ce que, si l'on change les valeurs de a, la même couleur est souvent nommée alternativement rouge et verte par ceux qui ont montré quelque hésitation dans leur réponse.

Quand on emploie l'ouverture la plus grande, et qu'on amène la flamme au voisinage immédiat du verre, il ne reste qu'un nombre relativement petit de personnes qui se trompent à l'égard de la couleur. Pour tenir compte aussi, dans la détermination numérique, de cette perceptibilité à une lumière plus vive, on n'a qu'à ajouter à la formule le terme $\frac{a^2}{A^2}$, où A désigne la distance normale de la flamme, a la distance exigée dans le cas particulier. Le pouvoir de distinction des couleurs devient alors:

$$K = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{d^2}{D^2} \cdot \frac{a^2}{A^2} = \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{d}{D} \cdot \frac{a}{A}\right)^2.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{K} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d}{D} \cdot \frac{a}{A} = L,$$

il en résulte pour le pouvoir de distinction, L étant trouvé par l'observation, $K = L^2$. Je crois que, dans la pratique, le mieux sera de s'en tenir à la valeur de L, et de se rappeler que $L = \sqrt{K}$.

Pour la lumière incidente $\frac{a}{A}$ disparaît, et pour la lumière transmise on a ordinairement $a = A$, de sorte qu'on pourra généralement se borner à la formule $L = \frac{1}{m} \cdot \frac{d}{D}$, et, si l'on se contente de l'ouverture de 1 mm., à la formule $L = \frac{d}{D}$.

Des objections ont été faites à toute méthode qui exige la désignation des couleurs. On a cru qu'il valait mieux faire assortir un certain nombre d'échantillons de couleurs, et relever les erreurs commises dans ce triage. Par ce moyen, en effet, le vice existant est promptement et sûrement décelé, et on obtient aussi des indications concernant ses différentes formes,

de sorte que la méthode est très recommandable pour un examen préliminaire. Mais je ne vois pas bien comment on pourrait l'approprier à une détermination numérique, ce que j'avais surtout en vue. En outre, la question de l'aptitude au service des chemins de fer se résout dans l'appréciation de couleurs qui sont désignées nominativement, et que l'employé doit pouvoir dénommer à son tour, pour agir en conséquence. La méthode que je propose tend donc directement au but. Et si par là elle semblait mériter à priori la préférence, l'application a montré que toutes les critiques dont elle a été l'objet s'évanouissent lorsque, outre le gris, on ne donne à spécifier que les couleurs fondamentales, le rouge, le vert, le jaune et le bleu.

Il est très intéressant d'observer comment le sujet examiné passe graduellement du doute à la certitude. — On lui montre un seul spécimen à 5 mètres de distance, il voit le petit disque, mais non la couleur. Un pas de plus: il se risque à prononcer le mot... "rouge". Encore un pas: hésitant, il dit: "non,... vert". Puis il en revient au "rouge", et il finit par déclarer de plus en plus catégoriquement que la couleur est rouge. Le point où il a acquis la certitude n'est vraiment pas difficile à préciser dans ces essais. — Ou bien, on place un grand nombre de petits disques de diamètres différents sur la même grande pièce de velours, et on fait nommer rapidement l'une après l'autre les couleurs des disques désignés avec une baguette: si le sens des couleurs est défectueux, on constate nettement que la personne, en approchant, qualifie exactement d'abord les disques les plus grands, puis les disques plus petits, dans les cas graves, seulement au voisinage, les disques les plus grands, et pas même ceux-ci quand le défaut est à son maximum.

De cette manière, le degré du trouble a toujours pu être déterminé numériquement avec une précision suffisante.

Pendant l'épreuve, les yeux ne doivent pas rester constamment fixés sur l'objet. La personne s'approchera le regard détourné, et, s'arrêtant, nommera immédiatement la couleur indiquée. Si la réponse se fait attendre, un pas de plus les yeux détournés, puis — de nouveau la question. Quand le regard reste

longtemps fixé, la couleur complémentaire peut entrer en jeu et rendre l'appréciation plus difficile.

La méthode qui vient d'être décrite a été appliquée, par douze médecins et ophthalmologues désignés pour ce travail, à l'examen du personnel de la Société d'exploitation des chemins de fer de l'Etat, environ 2300 personnes: les résultats obtenus, y compris ceux concernant la réfraction, l'acuité visuelle etc., pour chaque œil séparément, furent réunis sur des tableaux dressés à cet effet, puis les personnes, au nombre de 152, dont l'aptitude d'après ces tableaux était douteuse, eurent à subir ici une nouvelle épreuve, que je dirigeai avec l'assistance de M. le docteur Bouvin. Dans ces cas, les résultats de ma méthode furent aussi comparés avec ceux d'autres méthodes connues.

Parmi les intéressés, beaucoup prétendirent que leur vue satisferait mieux dans des expériences sur le terrain. Quatorze d'entre eux, choisis à cette fin, furent donc soumis à un pareil contrôle, avec les signaux ordinaires, tant de jour que de nuit. Leur attente se trouva déçue: les résultats concordèrent avec ce qu'avait fait prévoir l'examen à huis clos et démontrèrent ainsi l'excellence de la méthode. Dans un rapport détaillé, adressé au Directeur général de la Société susdite, j'ai résumé tous les résultats obtenus et en particulier ceux des épreuves comparatives sur le terrain, auxquelles avaient assisté avec intérêt le Directeur général et la plupart des employés de l'administration centrale.

Il n'entrait pas dans mon plan de communiquer ici ces résultats *in extenso*, et encore beaucoup moins d'y rattacher des considérations théoriques. Je noterai seulement que l'appréciation défectueuse du rouge et celle du vert se trouvaient bien réunies sans exception, mais que le degré du trouble n'était pas le même pour chacune de ces deux couleurs; des différences s'observaient aussi sous le rapport de la clarté, alors que pour l'œil normal la perceptibilité était égale: la question de savoir si ces différences sont en connexion avec la limite de visibilité du spectem du côté du rouge, doit encore être étudiée. Un autre point que je veux signaler, c'est que l'appréciation du bleu et du jaune était satis-

faisante dans tous les cas examinés par moi, un seul excepté, où le rouge et le vert n'étaient pas distingués non plus. Il est vrai que, dans l'épreuve préliminaire, l'attention avait été portée presque exclusivement sur le défaut de la vue quant au rouge et au vert.

Un résultat dès à présent acquis, c'est que, pour le rouge et le vert, il existe tous les passages depuis $K = 0$ jusqu'à $K = 1$. En général, les cas où la valeur de K avait déjà été trouvée très notablement inférieure à 1, furent les seuls qui arrivèrent à mon contrôle. Il reste donc à déterminer, d'après la méthode décrite, et pour chaque couleur, la valeur de K chez un grand nombre de personnes, prises sans distinction aucune. Si l'on veut toutefois pouvoir tirer de cette recherche des conclusions utiles à la théorie, on devra se servir des couleurs du spectre, et même du spectre d'une lumière constante, en s'attachant d'ailleurs aussi à rendre toutes les autres conditions égales. Je me suis déjà assuré qu'une pareille étude ne rencontre pas d'obstacle sérieux.

Deux choses seront à déterminer: *a.* la sensibilité à la lumière homogène de différentes longueurs d'onde, *b.* le rapport entre cette sensibilité et l'appréciation de la couleur spécifique correspondante.

Dans ce dernier rapport réside probablement la mesure de la saturation à laquelle la couleur est vue. Si l'œil normal perçoit la lumière homogène à une plus grande distance que la couleur correspondante, cela dépend, selon toute apparence, de ce que, même pour les couleurs spectrales et dans l'œil le plus parfait, la saturation est encore incomplète.

Connaissant *a.* et *b.*, on pourra également déterminer, soit par le mélange des couleurs spectrales avec la lumière blanche, soit à l'aide du disque rotatif, les plus faibles différences appréciables dans le degré de la saturation.

Est-ce que la vision défectueuse des couleurs tiendrait bien à autre chose qu'à la saturation moindre de la couleur observée à intensité égale? Et les différents degrés du trouble, jusqu'à l'incapacité complète, ne nous donneraient-ils pas le tableau du développement du sens des couleurs?

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

UNE LUNETTE PANCRATIQUE,

PAR

F. C. DONDERS.

RADCLIFFE LIBRARY
OXFORD
22 JUN 78

La lunette hollandaise, ou lunette de Galilée, se compose, comme on sait, d'un oculaire négatif, à distance focale f, et d'un objectif positif, à distance focale $f + l$. Cette grandeur l est la distance de l'oculaire à l'objectif pour laquelle la distance focale de la lunette est infinie, c'est-à-dire, avec laquelle les rayons tombés parallèlement sur l'objectif pénètrent parallèlement dans l'œil. Le grossissement est $m = \frac{f + l}{f}$.

Une pareille lunette a donc, pour la distance focale $F = \infty$, *une longueur constante et un grossissement constant.*

Or, j'ai tâché de construire une lunette avec laquelle on pût obtenir par le déplacement des lentilles, entre certaines limites, *tous les grossissements en une série continue.* La dénomination de *pancratique* me semble pouvoir convenir à une lunette de ce genre.

J'ai été conduit à m'occuper de cette construction par le besoin d'avoir un grossissement variable pour comparer les dimensions sous lesquelles un même objet se présente à des yeux de réfraction inégale. Il n'est pas rare de trouver une différence de réfraction entre les deux yeux d'une même personne (anisométropie).

M. Knapp a démontré que lorsque cette différence ne dépend pas d'une différence dans le système dioptrique, mais presque exclusivement, ce qui est le cas ordinaire, d'une différence de longueur de l'axe optique, l'image rétinienne de l'œil amétrope est, après qu'on a corrigé ce défaut par un verre placé au foyer antérieur, de la même grandeur que l'image de l'œil emmétrope. Dans ce cas, les images rétiniennes du même objet auront donc, l'amétropie étant corrigée, une grandeur égale pour les deux yeux. La question se présente maintenant de savoir sous quelle grandeur relative l'objet est alors vu par chaque œil. Si l'on tient un prisme faible devant un des yeux, — ou, mieux encore, devant chacun des yeux un prisme très faible, l'un à angle tourné vers le haut, l'autre à angle dirigé vers le bas, — l'une des images dédoublées apparaît au-dessus de l'autre et leurs grandeurs peuvent être comparées entre elles. Pour objet, on choisira une figure plane, — un carré, un triangle ou un cercle.

De cette manière, on constate facilement que l'objet est vu, en général, plus petit par un œil myope que par un œil emmétrope, et plus grand, au contraire, par un œil hypermétrope. Mais il s'agissait de connaître le rapport exact de ces grandeurs, et, pour y parvenir, il me parut nécessaire de déterminer le grossissement qu'il fallait donner à la plus petite ou la réduction qu'il fallait faire subir à la plus grande, pour les amener à être égales entre elles. Or ce grossissement et cette réduction pouvaient être obtenus au moyen d'une lunette faible tenue devant l'un des yeux. Comme telle, j'employai deux anneaux, séparés par une distance de deux pouces de Paris, dans lesquels je plaçai des verres de besicles ayant entre leurs distances focales une différence de deux pouces, c'est-à-dire, des combinaisons de $-\frac{1}{2}$ avec $+\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$ avec $+\frac{1}{5}$ etc. jusqu'à $-\frac{1}{28}$ avec $+\frac{1}{30}$. La première donnait $m = 2$, la dernière $m = \frac{15}{14}$. Lorsqu'on avait trouvé la combinaison par laquelle la plus petite des deux images dédoublées était rendue égale à la plus grande, il fallait qu'en

retournant la lunette, tenue alors devant l'autre œil, la plus grande image devînt égale à la plus petite; cela fournissait un certain contrôle. Néanmoins, la méthode offrait de graves inconvénients. Quand on observait comparativement avec des combinaisons différentes, le choix restait indécis; les tâtonnements successifs prenaient du temps, et le résultat manquait de certitude et de précision. En outre, le minimum de grossissement qu'on pouvait obtenir avec les verres de l'assortiment était trop grand dans beaucoup de cas. Il était évident qu'une lunette qui, tout en conservant son foyer à ∞, permettrait de faire varier le grossissement entre certaines limites, répondrait mieux à l'attente. Je me posai donc la question de savoir si la construction d'une pareille lunette était possible.

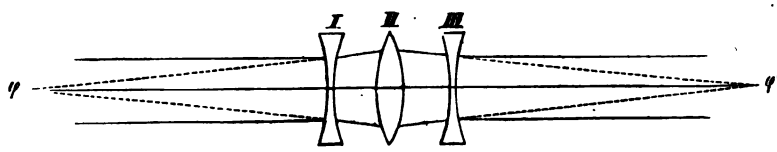
La réflexion me convainquit bientôt que diverses combinaisons de trois ou d'un plus grand nombre de lentilles pouvaient servir à cette fin. Entre toutes, je donnai la préférence à une combinaison de trois lentilles, à savoir: I. un *oculaire concave* de position fixe, III. un *objectif concave* mobile et, entre deux, II. une *lentille convexe* mobile, plus forte que I ou III, mais plus faible que I + III.

Je visais, pour le moment, à obtenir des valeurs limites $m = \frac{4}{3}$ et $m = \frac{3}{4}$ au moyen d'une lunette courte. Il serait satisfait à ces conditions, si les valences de I, II, III étaient respectivement de 12, 21 et 12 dioptries, c'est-à-dire, si ces lentilles avaient des distances focales de $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{21}$ et $\frac{1}{12}$ de mètre. En réunissant alors II et III, on avait un objectif positif de $21 - 12 = 9$, un oculaire négatif de 12, et par conséquent $m = \frac{12}{9}$. La réunion de II avec I donnait un oculaire positif de $21 - 12 = 9$, un objectif négatif de 12, donc $m = \frac{9}{12}$. La longueur de la lunette serait, avec ce grossissement, $\frac{1}{9} - \frac{1}{12} = 0{,}027$

mètre. Prenant en considération que la lentille II ne pouvait être réunie avec I ou III, mais seulement amenée en contact avec elles, et que par conséquent les valeurs limites de m ne pouvaient être atteintes, je pris I $= 12$, II $= 20$, III $= 12$ dioptries, représentant $m = \frac{12}{8}$ à $m = \frac{8}{12}$, mais donnant, en réalité, environ $\frac{4}{3}$ à $\frac{3}{4}$.

Dans l'application, mon point de départ fut $m = 1$ et $F = \infty$.

Fig. 1.



La lentille II (Fig. 1) occupe alors le milieu entre les lentilles I et III, qui se trouvent à une distance telle que leurs foyers φ et φ' sont en même temps les foyers conjugués de II. On a, dans ce cas, $l = 33{,}3$ mm. Si maintenant on recule II, il en résulte $m > 1$, mais bientôt l'image devient confuse : en effet, pour maintenir $F = \infty$, il faut aussi reculer III, d'abord lentement, puis avec une rapidité croissante, de sorte que pour $m = \frac{3}{2}$, maximum du grossissement, l atteint $\frac{1}{8} - \frac{1}{12}$ de mètre $= 125 - 83{,}33 =$ 41,66 mm.

Dans la pratique, et pour un opérateur peu exercé, ce tirage des deux lentilles présente quelque difficulté. Lorsque, par le déplacement de II, on a obtenu à peu près la grandeur voulue, il faut déplacer III jusqu'à ce que l'image devienne nette, puis de nouveau II pour rétablir la grandeur, et, au besoin, encore une fois III. Je me demandai donc si cet inconvénient ne pourrait être évité au moyen d'une certaine combinaison, et je ne tardai pas à reconnaître qu'on le réduirait au moins à un minimum en donnant des valeurs différentes à III et à I. Pour

$m = 1$, la lentille II ne se place alors plus à mi-distance de I et III, et après qu'on a reculé II, ce qui rend $m > 1$, la lentille III doit d'abord se rapprocher un peu de I, pour ne commencer à s'en éloigner que lorsque le grossissement continue à augmenter. Nous obtenons donc dans ce cas, avec des valeurs croissantes de m, un point de rebroussement pour les valeurs de l. Au lieu de

12 20 12,

j'employai maintenant

12 20 11,

et plus tard

12 19 11,

combinaison qui, pour de faibles grossissements, se montra pleinement satisfaisante.

Désirant toutefois avoir des formules commodes pour l'exécution de tous les calculs nécessaires, et obtenir, si possible, l'indication de systèmes encore meilleurs, je m'adressai à mon ami et collègue M. Grinwis, qui, obligeant comme toujours, me communiqua les formules suivantes:

	I. Oculaire.	II. Lentille intermédiaire.	III. Objectif.
Distances focales:	f	f'	f''
Soient:	$-\frac{1}{f} = a$	$\frac{1}{f'} = b$	$-\frac{1}{f''} = c$,

en outre: distance de I à II (oculaire à lentille intermédiaire) $= \Delta$

„ „ II à III (lentille intermédiaire à objectif) $= \Delta'$

1) Etant donné Δ ou Δ', trouver le grossissement m:

$$m = \frac{b - a + a\,b\,\Delta}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$m = \frac{a}{b - c + b\,c\,\Delta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

2) Etant donné m, trouver Δ et Δ':

$$\Delta = \frac{c\,m - (b - a)\,m}{a\,b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\Delta' = \frac{a - (b - c)\,m}{b\,c\,m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

3) Etant donné m, trouver la longueur l du système entier:

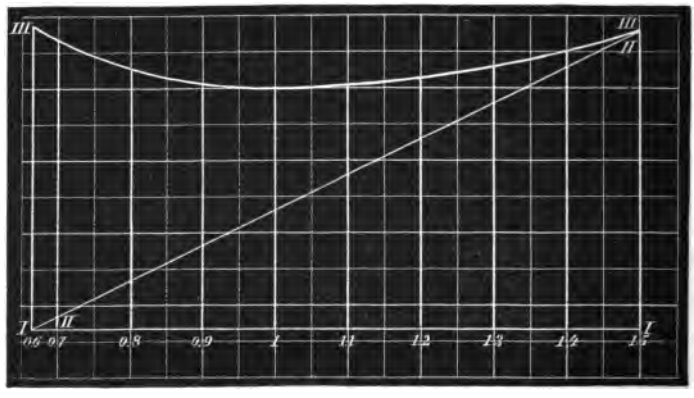
$$l = \frac{c^2 m^2 - (b\,c - 2\,a\,c + a\,b)\,m + a^2}{a\,b\,c\,m} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

En possession de ces formules, je les fis servir en premier lieu au calcul de Δ et Δ', pour les différentes valeurs de m dans le système $a = 12$, $b = 20$, $c = 12$; je trouvai ainsi:

m	Δ	Δ'	l
1,5	41,66	0	41,66
1,4	36,66	2,381	39,05
1,3	31,66	5,125	36,79
1,2	26,66	8,333	35,00
1,1	21,66	12,121	33,69
1	16,66	16,66	33,33
0,9	11,66	22,222	33,89
0,8	6,66	29,16	35,83
0,7	1,66	38,095	39,76
0,66	0	41,66	41,66

Les résultats de ce calcul sont combinés dans la fig. 2. L'ab-

Fig. 2.



scisse I I, sur laquelle sont marquées les valeurs de m, représente en outre la situation constante de I. Les lignes II II et III III indiquent les positions de II et III pour toutes les valeurs

de m. Ainsi les ordonnées de la figure nous fournissent les positions des lentilles et par conséquent les valeurs de Δ, Δ' et l pour toutes les valeurs de m, dans les dimensions réelles de la lunette.

On reconnaît que II, pour une même variation de m, subit partout un même déplacement, en d'autres termes, que les variations arithmétiques des valeurs de m sont proportionnelles aux déplacements, et que par suite les grossissements peuvent être lus sur une échelle divisée en parties égales.

On reconnaît aussi que, lorsqu'on ne s'écarte pas beaucoup de $m = 1$, la lentille III ne demande qu'un faible déplacement, mais que celui-ci s'élève déjà à 1,66 mm. pour $m = 1{,}2$: à défaut de ce déplacement, la lunette acquiert une distance focale négative de $2^m{,}86$, avec laquelle les images sont loin d'être nettes. C'est un point sur la signification duquel nous reviendrons plus loin.

Pour les systèmes semblables à celui que je viens de décrire, le maximum de grossissement est

$$M = a : b - c,$$

la longueur maximum

$$L = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{a}.$$

Si l'on prend $a = 12$, $b = 13$, $c = 12$,
on a $M = 12 : 1 = 12$
$L = 1000 - 83{,}33 = 916{,}66$ mm.
Si l'on prend $a = 12$, $b = 23$, $c = 12$,
on a $M = 12 : 11 = 1{,}0909$
$L = 90{,}9 - 83{,}33 = 7{,}6$ mm.

Avec ces dernières valeurs, on approche des limites de b, par rapport à a et à c. Si l'on fait $b = c$, les valeurs de M et de L deviennent infinies. Pour $b = 2c$, on a $M = 1$ et $L = 0$.

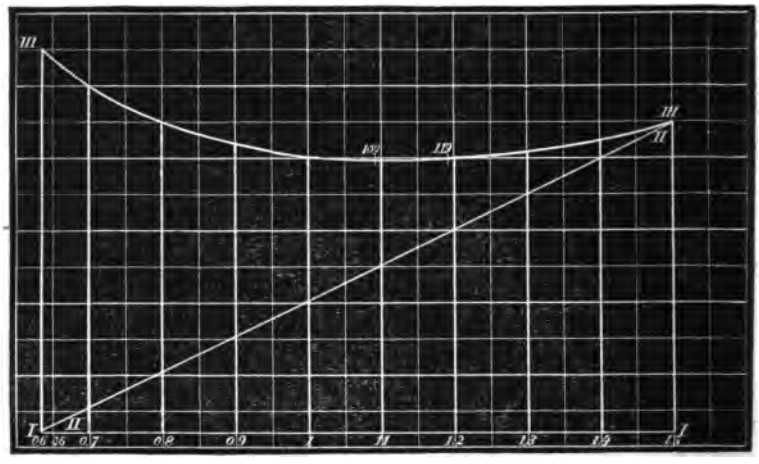
Si, en laissant à M les mêmes valeurs limites, on désire avoir des lunettes plus longues ou plus courtes, on n'a qu'à diminuer ou à augmenter dans une même proportion les valeurs de a, b et c.

En second lieu, j'ai appliqué les formules au système $a = 12$, $b = 19$, $c = 11$, ce qui m'a donné:

1,5	41,66	0	41,66
1,4	36,84	2,734	39,574
1,3	32,02	5,846	37,866
1,2	27,19	9,57	36,76
1,19 $\left(=\frac{12^2}{11^2}\right)$	26,71	9,97	36,68
1,1	22,37	13,92	36,29
1,0909 $\left(=\frac{12}{11}\right)$	21,93	14,35	36,28
1	17,54	19,14	36,68
0,9	12,72	25,52	38,24
0,8	7,89	33,43	41,32
0,7	3,07	43,75	46,82
0,6363	0	51,95	51,95

La fig. 3 représente ces résultats.

Fig. 3.



De la comparaison des fig. 2 et 3, ressort une différence qui mérite d'être signalée. A la vérité, m croît de nouveau dans le même rapport que Δ, et, avec l'accroissement de m, la longueur

$l = \Delta + \Delta'$ commence aussi par diminuer, pour augmenter ensuite; mais, ainsi que je l'avais prévu, $m = 1$ ne coïncide plus avec le minimum de l, lequel n'est atteint que pour $m = \frac{a}{c}$, c'est-à-dire, pour $m = \frac{12}{11}$. De part et d'autre du minimum nous trouvons maintenant chaque fois deux valeurs égales de l, — notamment, pour $m = \frac{a^2}{b^2} = \frac{144}{121} = 1{,}19$ la même valeur que pour $m = 1$. Cette valeur s'écarte encore peu du minimum:

$$m = 1, \qquad l = 36{,}68$$

$$m = \frac{12}{11}, \text{ minimum de } l = 36{,}28$$

$$m = \frac{114}{121}, \qquad l = 36{,}68.$$

La différence n'est que de 0.4 mm.

Cela signifie que de $m = 1$ à $m = \frac{144}{121}$, pour maintenir $F = \infty$, il suffit de faire glisser de 0,4 mm. la lentille objective.

Or, il est permis de se demander si ce mouvement est bien nécessaire, en d'autres termes, si, entre les susdites limites de m, on ne peut pas se contenter de déplacer la lentille intermédiaire.

Pour en juger, j'ai calculé la distance focale du système dans l'hypothèse où il ne serait pas touché à la lentille III. Quand le système a sa longueur minimum, correspondant au grossissement $\frac{12}{11}$, on a $\Delta = 21{,}93$, $\Delta' = 14{,}35$, $l = 36{,}28$. En prenant maintenant pour point de départ $m = 1$ et $F = \infty$, ce qui exige $l = 36{,}68$, et en ne déplaçant que la lentille intermédiaire, on obtient $\Delta = 21{,}93$, $\Delta' = 36{,}68 - 21{,}93 = 14{,}75$. Pour cette position des verres, le calcul m'a donné une distance focale positive $F = 17{,}3$ mètres. Une pareille valeur est sans influence sensible sur la netteté des images, et peut bien être négligée aussi en ce qui concerne le grossissement. Il en est de même de la distance focale négative de 20 mètres que j'ai calculée pour $\Delta = 28{,}639$ et $\Delta' = 1{,}049$,

l constante $= 36{,}68$, disposition où Δ répond à un grossissement de $m = 1{,}23$. Le système choisi peut donc être employé de $m = 1$ à $m = 1{,}23$, et aussi, retourné, de $m = 1$ à $m = 0{,}813$, sans déplacement de la lentille objective. Cet important avantage a été obtenu grâce à l'inégalité des lentilles I et III. Pour le but que j'avais en vue dans la construction de la lunette pancratique, je n'ai presque jamais besoin de dépasser les limites en question.

En dehors de ces limites, — et aussi en dedans lorsqu'une grande exactitude est nécessaire, — il sera bon de maintenir $E = \infty$. On pourrait bien imaginer un mécanisme par lequel, en même temps que le déplacement de II, serait obtenu le déplacement correspondant de III, ce qui permettrait aussi de prendre $a = c$. Mais il suffit d'appliquer une double échelle, l'une pour déterminer la position de a, l'autre pour lire la position correspondante de III: suivant que l'observateur déplace alors II, pour chercher le grossissement nécessaire, il peut donner à III la position correspondante. Pour la lentille intermédiaire l'échelle sera à divisions égales (voir II II fig. 3); quant à la lentille objective, la nature de son échelle se déduira de la courbe III III.

La circonstance qu'entre les limites ordinaires de m le déplacement de III est si minime, fait que l'image ne cesse pas d'être nette, et supprime par conséquent toute difficulté dans la recherche du grossissement voulu. Lorsque celui-ci est trouvé, l'observateur peut lui-même déplacer III autant que l'exige la position de II, et, après avoir retouché encore une fois II, regarder le résultat comme exact.

Pour avoir tous les avantages d'un pareil système, on doit prendre, en général, $a : c =$ la racine carré du grossissement qu'on n'aura à dépasser que par exception.

La limite absolue de m s'obtient, telle qu'on la désire, par le choix de b (voir ci-dessus). Avec b change alors aussi la distance focale F′ que le système prend pour $m = \frac{a}{c}$; dans les systèmes

qui entrent en considération pour le but que je me suis proposé, F est approximativement proportionnel à b. J'ai trouvé, en effet, pour

$$a = 12 \quad b = 20 \quad c = 11, \quad F = 18^{m},386.$$
$$a = 12 \quad b = 19 \quad c = 11, \quad F = 17^{m},307.$$

La longueur de la lunette se détermine à volonté: tout en laissant à a, b et c leurs valeurs relatives, on n'a qu'à modifier leurs valeurs absolues, auxquelles la longueur de la lunette est inversement proportionnelle. L'allongement de la lunette offre l'avantage que F devient plus grand, et que par conséquent les images perdent moins de leur netteté quand on néglige de déplacer III.

La lunette pancratique est susceptible d'usages divers, et le principe se laisse aussi appliquer à d'autres appareils dioptriques. Peut-être aurai-je plus tard l'occasion de revenir sur ce sujet.

THÉORIE

DE LA

LUNETTE PANCRATIQUE DE M. DONDERS,

SUR

J. A. C. OUDEMANS.

---

§ 1. PROBLÈME DE LA LUNETTE PANCRATIQUE. DOUBLE SOLUTION, DONT L'UNE SEULEMENT SATISFAIT AUX CONDITIONS POSÉES. CETTE SOLUTION DONNE ENCORE DES LUNETTES DE DEUX CONSTRUCTIONS DIFFÉRENTES.

D'après les communications faites par M. Donders, tant à la séance du 30 juin de l'Académie des Sciences à Amsterdam que plus tard, j'ai posé le problème de la lunette pancratique comme suit:

„Composer au moyen de trois lentilles une lunette terrestre, d'une longueur donnée et très petite a, (c. a. d. pas plus longue qu'un décimètre, et si possible pas plus longue que cinq centimètres) lunette telle que la lentille du milieu étant déplacée un peu en avant ou en arrière, le grossissement varie, mais que la précision des images en souffre très peu; et que le grossissement puisse varier entre les limites 1 et $\frac{n+1}{n}$, sans que la distance focale équivalente de la lunette entière descende au-dessous de $\pm$ F."

Comme l'a déjà dit M. Donders, M. Grinwis aussi s'est occupé de la théorie de la lunette pancratique, cependant ma manière de traiter le problème diffère de la sienne, et a révélé quelques

autres propriétés de cette lunette; c'est pourquoi je prends la liberté de donner ici ma solution.

Nommons φ_0, φ_1 et φ_2 les distances focales des trois lentilles, e la distance de la première lentille ou *objectif* à la *lentille du milieu*, alors la distance de la lentille du milieu à la troisième lentille ou *oculaire* sera $a - e$.

La distance focale d'une lunette étant infinie, nous avons l'équation:

$$f = \frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - e(\varphi_1 + \varphi_2) - (a-e)(\varphi_0 + \varphi_1) + e(a-e)} = \infty,^{1)} \quad (1)$$

c'est-à-dire, en nommant le dénominateur N,

$$N = \varphi_0\varphi_1 + \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - a(\varphi_0 + \varphi_1) + e(\varphi_0 - \varphi_2 + a - e) = 0, \quad (2)$$

première équation entre les quatre inconnues φ_0, φ_1, φ_2 et e.

La condition qu'un très petit déplacement de la lentille du milieu ne nuise pas à la précision des images, donne pour seconde équation

$$\frac{\partial N}{\partial e} = \varphi_0 - \varphi_2 + a - 2e = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

d'où l'on tire

$$e = \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_2 + a) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et

$$\varphi_0 - \varphi_2 + a - e = e.$$

Substituant la dernière dans l'équation (2), nous aurons

$$\varphi_0\varphi_1 + \varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - a(\varphi_0 + \varphi_1) + e^2 = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

Pour trouver e, nous y substituerons la valeur de a, tirée de (3), ce qui donne

$$e^2 - 2(\varphi_0 + \varphi_1)e + (2\varphi_1 + \varphi_0)\varphi_0 = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\{e - (\varphi_0 + 2\varphi_1)\}\{e - \varphi_0\} = 0,$$

---

[1]) Gavarret, *Des images par réflexion et par réfraction*, p. 140, corrigé par M. H. Snellen, dans sa description du Phakomètre, *Maandblad voor natuurwetenschappen*, 7e Année, no. 2.

dont nous tirons pour e deux valeurs:

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1 \quad (6) \quad \text{et} \quad e = \varphi_0, \quad \ldots (6^*)$$

d'où:

$$a = \varphi_0 + 4_1 + \varphi_2 \quad (7) \quad \text{et} \quad a = \varphi_0 + \varphi_2, \ldots (7^*)$$

$$a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2 \quad (8) \quad \text{et} \quad a - e = \varphi_2. \quad \ldots (8^*)$$

Si l'on considère l'objectif comme composé de la première et de la seconde lentille réunies, la distance focale en est égale à

$$\frac{\varphi_0 \varphi_1}{\varphi_0 + \varphi_1 - e},$$

et le grossissement de la lunette sera:

$$V = -\frac{\varphi_0 \varphi_1}{(\varphi_0 + \varphi_1 - e)\varphi_2} \ldots\ldots\ldots (9_a)$$

Si, au contraire, la première lentille seule est considérée comme objectif, et les deux autres ensemble comme formant un oculaire, dont la distance focale est égale à

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - a + e},$$

le grossissement s'exprimera encore par l'expression

$$V = -\frac{\varphi_0 (\varphi_1 + \varphi_2 - a + e)}{\varphi_1 \varphi_2} \ldots\ldots\ldots (9_b)$$

Les deux valeurs trouvées pour V doivent être identiques; en les égalant l'une à l'autre, on retrouvera l'équation (2).

En substituant dans l'équation (9_a) les deux valeurs trouvées pour e, (6) et (6*), l'on aura

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} (10) \quad \text{et} \quad V = -\frac{\varphi_0}{\varphi_2} \ldots\ldots\ldots (10^*)$$

Or, a et e sont l'un et l'autre positifs, et $a > e$, donc, à cause de (6*) et (7*), φ_0 et φ_2 seront positifs et à cause de (10*), V sera négatif. Cette solution ne satisfait donc pas aux conditions du problème, parce qu'une lunette composée d'après cette solution donnerait des images renversées.

Dans la première solution, on tire des équations (6) et (8),

que $\varphi_0 + 2\varphi_1$ et $2\varphi_1 + \varphi_2$ seront aussi positifs, et de (10) que φ_0 et φ_2 auront le même signe. Provisionnellement nous ne savons pas davantage des signes de φ_0, φ_1 et φ_2. Mais si l'on prend en considération, que, d'après les conditions du problème, $a = \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2$ devra être très petit en comparaison de φ_0, φ_1 et φ_2, il s'en suivra que φ_1 aura un autre signe que φ_0 et φ_2, ce qui donnera une double construction:

1re construction: objectif et oculaire *négatifs*, lentille du milieu *positive*:

2me construction: objectif et oculaire *positifs*, lentille du milieu *négative*.

---

§ 2. DÉPLACEMENT NÉCESSAIRE DE L'OBJECTIF OU DE L'OCULAIRE POUR UN DÉPLACEMENT FINI DE LA LENTILLE DU MILIEU, CELLE-CI ÉTANT SUPPOSÉE POSITIVE. DISTANCE FOCALE DE LA LUNETTE ENTIÈRE, SI CE DÉPLACEMENT DE L'OBJECTIF OU DE L'OCULAIRE N'A PAS LIEU.

De l'équation

$$\frac{\partial N}{\partial e} = 0,$$

nous concluons que, pour une variation infiniment petite de e, le dénominateur N demeurera $= 0$, et $f = \infty$. Pour une variation plus grande de e, a devra changer aussi un peu, si l'on veut garder la distance focale $= \infty$. Nous chercherons donc d'abord le grossissement pour une variation finie Δe, accompagnée de la variation correspondante de a, et nous déterminerons ensuite la distance focale f, dans l'hypothèse que a ne change pas.

Il faudra observer d'abord qu'une variation de a peut être effectuée de deux manières, savoir en déplaçant soit l'objectif, soit l'oculaire. En déplaçant l'objectif, on change Δe, tandis que cette même valeur ne varie pas par le déplacement de l'oculaire.

Substituons, dans le dénominateur N, pour e et a, au lieu des valeurs données par (6) et (7), les valeurs suivantes:

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1 + \Delta e,$$
$$a = \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 + \Delta a,$$

ou bien, ce qui mène encore plus vite au but, considérons ce dénominateur comme une fonction de a et de e, et remarquons que pour les valeurs de a et de e, données dans (6) et (7),

$$\begin{aligned}
N &= 0, \\
\frac{\partial N}{\partial a} &= -\varphi_0 - \varphi_1 + e = +\varphi_1, \\
\frac{\partial N}{\partial e} &= \varphi_0 - \varphi_2 + a - 2e = 0, \\
\frac{\partial^2 N}{\partial a^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 N}{\partial a\, \partial e} &= 1, \\
\frac{\partial^2 N}{\partial e^2} &= -2,
\end{aligned}$$

et que tous les quotients différentiels d'un ordre plus élevé de N par rapport à a et e, sont aussi égaux à zéro; nous aurons, en appliquant le théorème de Maclaurin, l'équation exacte

$$N = \varphi_1 \Delta a + \Delta a \Delta e - \Delta e^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Or, puisque N doit rester $= 0$,

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 + \Delta e}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

et, après la substitution dans (9) de l'équation

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1 + \Delta e,$$

l'on aura

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

D'après ce qui a été remarqué plus haut, les équations (12) et (13) s'appliqueront au cas où l'oculaire serait employé pour

ramener la distance focale à ∞ et rétablir ainsi la netteté des images.

Nommons maintenant les limites du grossissement $\frac{n+1}{n}$ et 1, où n est positif, et, pour fixer les idées, supposons que φ_1 soit positif, alors nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} &= \frac{n+1}{n}, \\ \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n+1}{n}$$

et

$$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Ensuite, en prenant dans l'équation (12) Δe d'abord négatif, puis positif, nous aurons pour la limite supérieure du grossissement

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{\varphi_1}{2n(2n+1)}, \quad \ldots\ldots (16)$$

et pour la limite inférieure

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)}, \quad \ldots\ldots (17)$$

équations qui donnent le déplacement nécessaire de l'oculaire.

En général nous aurons, à cause de l'équation (11):

$$f = \frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 \Delta a + \Delta a \Delta e - \Delta e^2} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Si l'on prend $\Delta e = \mp \frac{\varphi_1}{2n+1}$, et si l'on tire Δa de (16) ou de (17), f sera $= \infty$; mais si $\Delta a = 0$, c'est-à-dire si l'on ne déplace que la lentille du milieu, l'on aura

$$f = -\frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\Delta e^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Donc, si φ_0 et φ_2 sont négatifs et que φ_1 soit positif, comme nous l'avons déjà supposé en déduisant les équations (14), f sera toujours négatif. Posons donc, d'après les données du problème, la limité de f, prise positive, $= F$, nous aurons

$$F = \frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\Delta e^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

ou bien, eu égard à l'équation (15):

$$F = (2n+1)^2 \frac{\varphi_0 \varphi_2}{\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

En substituant (15) dans (14), nous aurons encore

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{2n+2}{2n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

pour le grossissement de la lunette, quand la lentille du milieu occupe sa position originale ou moyenne.

---

§ 3. CONSIDÉRATIONS SUR LE CAS OÙ, POUR LES DEUX LIMITES DU GROSSISSEMENT, LA LONGUEUR DE LA LUNETTE EST SUPPOSÉE LA MÊME.

Pour le grossissement $= 1$, il faut faire *reculer* la lentille du milieu, tandis que pour le grossissement $= \frac{n+1}{n}$, il faut la faire *avancer;* si en la faisant avancer, on rend la longueur de la lunette égale à celle qu'elle a quand, pour obtenir le grossissement minimum, on fait reculer la lentille du milieu, Δe et V ne sont pas les mêmes qu'auparavant. En combinant alors les équations (16) et (17), nous aurons pour une lentille du milieu positive

$$\frac{\Delta e^2}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)},$$

d'où l'on tire;

$$(2n+1)(2n+2)\Delta e^2 + \Delta e \varphi_1 - \varphi_1{}^2 = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\{(2n+2)\Delta e - \varphi_1\}\{(2n+1)\Delta e + \varphi_1\} = 0,$$

dont les deux racines sont :

$$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+2} \quad \text{et} \quad \Delta e = -\frac{\varphi_1}{2n+1} \quad \ldots\ldots (23)$$

Le signe négatif de la seconde valeur donne un déplacement de la lentille du milieu dans le sens opposé à celui que nous cherchons, et correspond à la limite inférieure du grossissement, $V = 1$; la première valeur donne

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2n+2}}.$$

Mais nous avons :

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{2n+1}} = 1,$$

donc

$$V = \frac{\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{2n+1}}{\varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2n+2}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \quad \ldots\ldots (24)$$

Dans ce cas, le grossissement sera donc égal à la deuxième puissance du grossissement que possède la lunette, quand la lentille du milieu occupe sa position originale.

---

§ 4. SOLUTION DU PROBLÈME, LORSQU'ON EMPLOIE L'OCULAIRE POUR CORRIGER LA DISTANCE FOCALE.

Les équations, dont il faudra tirer les quatre inconnues φ_0, φ_1, φ_2 et e, sont donc les suivantes

$$(6) \qquad e = \varphi_0 + 2\varphi_1,$$

$$(7) \qquad \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = a,$$

$$(22) \qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{2n+2}{2n+1},$$

tandis que l'équation (21) nous fournit la quatrième

$$\frac{\varphi_0 \varphi_2}{\varphi_1} = \frac{F}{(2n+1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

La solution des trois dernières équations conduira évidemment à une équation du second degré. Pour simplifier la solution, posons

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

En observant que $a - e$ et φ_1 sont positifs et que φ_2 est négatif, on déduit de l'équation (8) que p sera un nombre négatif, un peu plus grand que 0,5.

En multipliant (26) par (25) nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= p \times \frac{F}{(2n+1)^2}, \\ &\text{donc, à cause de (22),} \\ \varphi_2 &= p \times \frac{F}{(2n+1)(2n+2)}, \\ &\text{et enfin} \\ \varphi_1 &= p^2 \times \frac{F}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Et, en substituant ces trois équations dans (7), nous aurons après quelques réductions:

$$p^2 + \frac{4n+3}{4(2n+1)} p - \frac{(n+1)(2n+1)}{2} \cdot \frac{a}{F} = 0 \quad \ldots \quad (28)$$

Cette équation a une racine négative plus grande et une racine positive plus petite, dont la première seule pourra nous servir; en y faisant attention, la solution goniométrique nous donnera

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha &= \frac{4(2n+1)}{4n+3} \sqrt{\frac{2(n+1)(2n+1)a}{F}}, \\ p &= -\frac{(4n+3)\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{4(2n+1)\cos\alpha}, \\ \varphi_0 &= \frac{pF}{(2n+1)^2}, \\ \varphi_2 &= \frac{2n+1}{2n+2}\varphi_0, \\ \varphi_1 &= p\,\varphi_2, \\ e &= \varphi_0 + 2\,\varphi_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

et la preuve du calcul sera donnée par l'équation

$$a = \varphi_0 + 4\,\varphi_1 + \varphi_2.$$

§ 5. SOLUTION DU PROBLÈME EN EMPLOYANT L'OBJECTIF POUR CORRIGER LA DISTANCE FOCALE.

Si, au contraire, on veut corriger la distance focale en déplaçant l'objectif, il faut s'imaginer la lunette renversée bout pour bout, et remplacer φ_0 par φ_2 et réciproquement; nous aurons alors:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} = 1,$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{n}{n+1},$$

d'où l'on tire, en les divisant l'une par l'autre, comme dans le paragraphe 2:

$$\Delta e = \frac{\varphi}{2n+1}.$$

La formule

$$\Delta a = \frac{\Delta e^2}{\varphi_1 + \Delta e},$$

qui donne le déplacement de l'oculaire, (maintenant φ_0), est encore toujours applicable; on obtient donc pour Δa les mêmes valeurs qu'auparavant. Mais en renversant encore une fois la lunette, les limites du grossissement changent aussi, et nous aurons pour la limite supérieure $V = \frac{n+1}{n}$:

$$\Delta a = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

et pour la limite inférieure $V = 1$:

$$\Delta a = \frac{\varphi_1}{2n(2n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Pour la position moyenne de la lentille du milieu, nous aurons

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \frac{\varphi_1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Les trois équations à résoudre seront donc, dans ce cas:

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & \varphi_0 + 4\,\varphi_1 + \varphi_2 = a, \\ (32) & \dfrac{\varphi_0}{\varphi_2} = \dfrac{2n+1}{2n}, \\ (21) & \dfrac{\varphi_0\,\varphi_2}{\varphi_1} = \dfrac{F}{(2n+1)^2}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (33)$$

Posons encore

$$\varphi_1 = q\,\varphi_0,$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 = q \times \dfrac{F}{(2n+1)^2}, \\ \varphi_0 = q \times \dfrac{F}{2n\,(2n+1)}, \\ \varphi_1 = q^2 \times \dfrac{F}{2n\,(2n+1)}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (34)$$

et, par substitution dans l'équation (7),

$$q_2 + \frac{4n+1}{4\,(2n+1)}\,q - \frac{n\,(2n+1)}{2}\,\frac{a}{F} = 0,$$

dont la solution nous donne:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \dfrac{4\,(2n+1)}{4n+1}\sqrt{\dfrac{2n\,(2n+1)\,a}{F}}, \\ q = -\dfrac{(4n+1)\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{4\,(2n+1)\cos\alpha}, \\ \varphi_2 = q \times \dfrac{F}{(2n+1)}, \\ \varphi_0 = \dfrac{2n+1}{2n}\,\varphi_2, \\ \varphi_1 = q\,\varphi_0, \\ e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1. \end{array}\right\} \ldots\ldots (35)$$

Il est aisé de trouver le grossissement en fonction du déplacement de la lentille du milieu, car, en changeant entre elles les deux lentilles extérieures, l'équation (13) devient évidemment, pour chaque valeur arbitraire de Δe:

$$\frac{1}{V} = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e},$$

d'où

$$V = \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1},$$

donc, en nommant le grossissement dans la position moyenne de la lentille du milieu $\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = V'$, l'on aura

$$V = V'\left(1 + \frac{\Delta e}{\varphi_1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

c'est-à-dire: *Qu'en employant l'objectif pour corriger la distance focale, le grossissement augmente uniformément en déplaçant la lentille du milieu, de sorte qu'une échelle divisée régulièrement pourra indiquer le grossissement*, — propriété mise en pratique dès 1820 par Pearson et Arago, pour construire leurs micromètres à cristal de roche.

---

§ 5. LIMITE SUPÉRIEURE DE F.

Nous voyons donc que, pour des valeurs données de a, n et F, il est possible de composer la lunette pancratique; il y a pourtant une condition, dont nous n'avons par encore tenu compte, et qui donne une limite que F ne peut pas surpasser, savoir que le déplacement nécessaire Δe doit rester $< e$ et $< a - e$.

Ici l'épaisseur des lentilles est toujours négligée, nous en parlerons plus tard.

Or, nous avons

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1,$$
$$a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2,$$

mais $\varphi_0 > \varphi_2$, et puisque φ_0 et φ_2 sont négatifs, tandis que φ_1 est positif,

$$e \text{ sera } < a - e,$$

et il faudra donc satisfaire à la condition

$$\Delta e < e,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1}{2n+1} < \varphi_0 + 2\varphi_1,$$

ou bien

$$(4n+1)\varphi_1 > -(2n+1)\varphi_0, \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

et, en substituant dans cette équation φ_1 et φ_0 de (27), nous trouvons, après quelques réductions:

$$sec\,\alpha + 1 = \frac{1 + cos\,\alpha}{cos\,\alpha} > \frac{8(2n+1)(2n+2)}{(4n+1)(4n+3)}, \quad \ldots \quad (38)$$

donc

$$sec^2\,\alpha > \frac{(16n^2 + 32n + 13)^2}{(4n+1)^2\,(4n+3)^3}.$$

Mais

$$tg^2\,\alpha = \frac{32(n+1)(2n+1)^3}{(4n+3)^2} \times \frac{a}{F},$$

donc on déduira des deux dernières équations

$$F < \frac{(2n+1)^2\,(4n+1)^2}{8n+5}\,a, \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

et c'est là la limite que F ne peut pas surpasser.

En posant $n = 2, 3, 4$, etc., nous aurons

pour $n = 2$, $F < 96\,\frac{3}{7}\,a$,
„ $n = 3$, $F < 285\,\frac{16}{29}\,a$,
„ $n = 4$, $F < 632\,\frac{25}{37}\,a$,
„ $n = 5$, $F < 1185\,\frac{4}{5}\,a$,

Il résulte donc de ce calcul, que si, par exemple, on désire composer une lunette pancratique dont le grossissement varie entre l'unité et $\frac{4}{3}$, cette composition est possible en prenant pour la lentille du milieu une lentille positive, pourvu qu'on prenne $F < 28{,}5$ mètres, c'est-à-dire, en supposant qu'on veuille seulement déplacer la lentille du milieu, il faudra, aux limites du grossissement, $\frac{4}{3}$ et 1, accommoder l'œil à une distance inférieure

de 28,5 mètres. Au cas qu'on ne voulût pas exiger autant de l'accommodation de l'œil, φ_0, φ_1 et φ_2 deviendraient plus grands, mais Δe aussi, et ce déplacement dépasserait e, c'est-à-dire la lunette n'offrirait pas assez d'espace pour le déplacement nécessaire de la lentille du milieu.

D'un autre côté, par le déplacement de l'objectif ou de l'oculaire, la distance focale peut toujours être corrigée, si donc on voulait prendre F beaucoup plus petit que la limite trouvée, Δe pourrait devenir trop petit; alors l'échelle qui doit servir pour lire le grossissement serait trop serrée, et une petite erreur en Δe causerait une erreur notable dans le grossissement V. Il s'agira donc de tenir le milieu entre ces deux extrêmes.

Si l'on veut tirer les valeurs de φ_0 et φ_1 des équations (35), qui s'appliquent au cas où l'on emploie l'objectif pour corriger la distance focale, il faudra observer qu'on n'aura plus $\Delta e < e$ mais $\Delta e < e + \Delta a$, c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_1}{2n+1} < \varphi_0 + 2\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

En prenant les valeurs de φ_0 et φ_1 de (34) et la valeur de q de (35), le résultat sera le même que celui que nous avons déjà trouvé. Mais on y parviendra encore d'une autre manière. Car, si on avance la lentille du milieu jusqu'au contact avec l'objectif, on aura, en négligeant l'épaisseur des lentilles:

$$e = 0.$$

La distance focale de tout le système devient donc, d'après les équations (1) et (2):

$$f = \frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_0 \varphi_1 + \varphi_0 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 - a(\varphi_0 + \varphi_1)},$$

ou bien, d'après l'équation (5):

$$f = -\frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{e^2},$$

qu'on aurait pu déduire aussi de (19) en posant $\Delta e = e$. Cette valeur, prise avec signe contraire, est donc plus petite que F,

c'est-à-dire, en empruntant à l'équation (27) les valeurs de φ_0, φ_1 et φ_2:

$$\frac{p^2 F}{\{2n+2+2p(2n+1)\}^2} < F,$$

donc

$$\begin{aligned} p &< 2n+2+2p(2n+1), \\ (4n+1) \times -p &< 2n+2, \\ -p &< \frac{2n+2}{4n+1}, \end{aligned}$$

ou, ayant égard à (29):

$$\frac{4n+3}{8(2n+1)}(1+\sec\alpha) < \frac{2n+2}{4n+1},$$

$$1+\sec\alpha < \frac{8(2n+1)(2n+2)}{(4n+1)(4n+3)},$$

équation que nous avons trouvée déjà plus haut, (éq. 38).

---

§ 7. LUNETTE PANCRATIQUE à LENTILLE DU MILIEU NÉGAVIVE. SOLUTION DU PROBLÈME. LIMITE INFÉRIEURE DE f.

Jusqu'ici nous avons supposé que la distance focale φ_1 était positive. Si nous la supposons négative, et que nous corrigions la distance focale de la lunette par un déplacement de l'oculaire, les équations (14) deviendront, vu que Δe est toujours positif:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} = 1, \qquad \frac{\varphi_0}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{n+1}{n},$$

donc

$$\frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n}{n+1},$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \Delta e &= \frac{-\varphi_1}{2n+1}, \\ \frac{\varphi_0}{\varphi_2} &= \frac{2n+2}{2n+1}, \\ f &= -\frac{\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2}{\Delta e^2} = \frac{\varphi_0 \varphi_2}{-\varphi_1}(2n+1)^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (40)$$

Dans ce cas f devient donc positif, c'est-à-dire que, la lentille du milieu étant déplacée, la lunette entière équivaut à une lentille *positive*; donc, si la distance focale n'est pas corrigée par l'objectif ou par l'oculaire, il faudra ajuster l'œil pour les rayons *convergents*.

Les trois équations, dont il faudra tirer φ_0, φ_1 et φ_2, sont donc les mêmes qu'au § 4, sauf qu'au lieu de F nous écrirons $-f$:

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = a, \\ (22) & \dfrac{\varphi_0}{\varphi_2} = \dfrac{2n+2}{2n+1}, \\ (40) & \dfrac{\varphi_0\,\varphi_2}{\varphi_1} = -\dfrac{f}{(2n+1)^2}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (41)$$

Donc, comme dans (27):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_0 = -p \times \dfrac{f}{(2n+1)^2}, \\ \varphi_2 = -p \times \dfrac{f}{(2n+1)(2n+2)}, \\ \varphi_1 = -p^2 \times \dfrac{f}{(2n+1)(2n+2)}. \end{array}\right\} \ldots\ldots (42)$$

Mais en substituant ces valeurs dans (7), nous aurons, au lieu de l'équation (28), l'équation suivante:

$$p^2 + \frac{4n+3}{4(2n+1)}p + \frac{(n+1)(2n+1)}{2}\frac{a}{f} = 0 \ldots (43)$$

Pour que cette équation ait des racines réelles, il faudra que

$$\frac{(4n+3)^2}{64(2n+1)^2} > \frac{(n+1)(2n+1)}{2}\frac{a}{f},$$

ou bien que

$$f > \frac{32(n+1)(2n+1)^3}{(4n+3)^2}\,a \ldots\ldots\ldots (44)$$

Si f est plus petit, il sera impossible de construire la lunette pancratique avec une lentille négative au milieu. Si f est plus

grand que la limite trouvée, p aura deux racines négatives, car, en posant

$$\sin\alpha = \frac{4(2n+1)}{4n+3}\sqrt{2(n+1)(2n+1)\frac{a}{f}},$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{4n+3}{8(2n+1)}(1 \pm \cos\alpha), \\ \varphi_0 &= -p \times \frac{f}{(2n+1)^2}, \\ \varphi_2 &= \frac{2n+1}{2n+2}\varphi_0, \\ \varphi_1 &= p\,\varphi_2, \\ e &= \varphi_0 + 2\,\varphi_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Si, au contraire, la distance focale est corrigée par un déplacement de l'objectif, nous pourrons renverser en imagination la lunette, remplacer φ_0 qar φ_2 et réciproquement, et nous aurons encore

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \times \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta e} = \frac{n}{n+1} \qquad \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \times \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = 1,$$

donc

$$\frac{\varphi_1 + \Delta e}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{n}{n+1},$$

et

$$\Delta e = \frac{-\varphi_1}{2n+1},$$

comme auparavant, mais

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta e} = \frac{2n+1}{2n},$$

et enfin

$$f = -\frac{\varphi_0\,\varphi_1\,\varphi_2}{\Delta e^2} = \frac{\varphi_0\,\varphi_2}{-\varphi_1}(2n+1)^2.$$

Les équations à résoudre deviendront donc les mêmes que (33), sauf qu'au lieu de F, il faudra mettre $-f$:

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = a, \\ (32) & \dfrac{\varphi_0}{\varphi_2} = \dfrac{2n+1}{2n}, \\ (21) & \dfrac{\varphi_0 \varphi_2}{\varphi_1} = -\dfrac{f}{(2n+1)^2}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (46)$$

donc, en posant encore $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_0} = q$,

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 = -q \times \dfrac{f}{(2n+1)^2}, \\ \varphi_0 = -q \times \dfrac{f}{2n(2n+1)}, \\ \varphi_1 = -q^2 \times \dfrac{f}{2n(2n+1)}, \end{array}\right\} \ldots\ldots (47)$$

et ensuite

$$q^2 + \frac{4n+1}{4(2n+1)} q + \frac{n(2n+1)}{2} \frac{a}{f} = 0 \ldots\ldots (48)$$

équation qui aura des racines réelles, si

$$f > \frac{32n(2n+1)^3}{(4n+1)^2} a \ldots\ldots\ldots\ldots (49)$$

alors on aura, en posant

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{4(2n+1)}{4n+1} \sqrt{2n(2n+1)\dfrac{a}{f}}, \\ q = -\dfrac{4n+1}{8(2n+1)}(1 \pm \cos\alpha), \\ \varphi_2 = -q \times \dfrac{f}{(2n+1)^2}, \\ \varphi_0 = \dfrac{2n+1}{2n} \varphi_2, \\ \varphi_1 = q\varphi_0, \\ e = \varphi_0 + 2\varphi_1. \end{array}\right\} \ldots\ldots (50)$$

§ 8. LIMITE SUPÉRIEURE DE f.

Aussitôt que f dépasse la limite trouvée en (44) ou (49), il existe pour chaque cas deux solutions. Mais, pour la même raison que pour la lunette pancratique à lentille du milieu positive, il existe une limite supérieure que f ne peut pas dépasser, afin qu'il y ait assez d'espace pour le déplacement nécessaire de la lentille du milieu.

Si cette lentille est négative, $a - e$ sera $< e$, car

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1,$$

$$a - e = \varphi_2 + 2\varphi_1,$$

où φ_0 est positif, φ_1 est négatif, et d'après (45) et (50), $\varphi_2 < \varphi_0$. Notre équation de condition sera donc

$$\Delta e < a - e,$$

ou bien

$$\frac{-\varphi_1}{2n+1} < 2\varphi_1 + \varphi_2,$$

d'où l'on tire

$$-(4n+3)\varphi_1 < (2n+1)\varphi_2.$$

A présent il ne faudra pas employer les équations (42), mais bien les équations (47), et nous trouverons après la substitution des valeurs de φ_1 et φ_2:

$$\frac{4n+3}{2n(2n+1)} q^2 f < -\frac{qf}{2n+1},$$

$$-q < \frac{2n}{4n+3},$$

ou bien, à cause de (45) ou (50):

$$\frac{4n+1}{8(2n+1)}(1 \pm \cos\alpha) < \frac{2n}{4n+3},$$

$$1 \pm \cos\alpha < \frac{16n(2n+1)}{(4n+1)(4n+3)},$$

$$1 \pm \cos\alpha < \frac{32n^2 + 16n}{16n^2 + 16n + 3}.$$

Or n étant toujours > 1, il sera toujours satisfait à cette équation quand on prend le signe inférieur; mais cette solution n'est pas celle qui correspond à la seule solution possible du

problème de la composition d'une lunette pancratique à lentille du milieu positive. En prenant le signe supérieur, nous aurons

$$\cos\alpha < \frac{16n^2 - 3}{16n^2 + 16n + 3},$$

donc

$$\cos^2\alpha < \frac{(16n^2 - 3)^2}{(16n^2 + 16n + 3)^2},$$

d'où il résulte

$$\sin^2\alpha > 1 - \frac{(16n^2 - 3)^2}{(16n^2 + 16n + 3)^2},$$

ou bien

$$\frac{32n(2n+1)^3}{(4n+1)^2}\frac{a}{f} > \frac{(16n+6)(32n^2+16n)}{(4n+1)^2(4n+3)^2},$$

d'où l'on tire

$$f < \frac{(2n+1)^2(4n+3)^2}{8n+3)}a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Prenons n successivement $= 2$, 3, 4 et 5, en y joignant les limites déjà trouvées, nous aurons la table suivante, où A indique que la distance focale est réglée par l'oculaire, et B, qu'elle est réglée par l'objectif.

	Lentille du milieu positive. Limites de F.		Lentille du milieu négative. Limites de f.			
			Limite inférieure.		Limite supérieure.	
n	Lim. inf.	Limite supérieure.	A	B	Première solution (signe + dans l'équat. (50)).	Seconde solution (signe — dans l'équ. (50)).
2	0	$96\frac{3}{7}a$	$99\frac{21}{121}a$	$98\frac{62}{81}a$	$159\frac{4}{19}a$	Point de limite.
3	0	$285\frac{16}{29}a$	$195\frac{31}{225}a$	$194\frac{142}{169}a$	$408\frac{1}{3}a$	
4	0	$632\frac{25}{37}a$	$323\frac{37}{361}a$	$322\frac{254}{289}a$	$835\frac{16}{35}a$	
5	0	$1185\frac{4}{5}a$	$483\frac{45}{529}a$	$482\frac{398}{441}a$	$1488\frac{35}{43}a$	

§ 9. EXEMPLE DE CALCUL.

Posons, pour exemple de calcul, $a = 100$ millimètres, $n = 3$, (alors le grossissement s'étendra de 1 à $\frac{4}{3}$), et F ou $f = 230\ a = 23$ mètres, et nous serons sûrs que toutes les solutions seront possibles.

Le calcul me donna les résultats suivants:

	Lentille du milieu positive.		Lentille du milieu négative.			
			A		B	
	A	B	1e solution.	2e solution.	1e solution.	2e solution.
Formules employées.	(29)	(35)	(45)		(50)	
φ_0	−296,6	−299,8	+174,7	+ 76,8	+176,7	+ 77,5
φ_1	+164,025	+164,2	− 56,875	− 11,0	− 57,05	− 10,97
φ_2	−259,5	−257,0	+152,8	+ 67,2	+151,5	+ 66,4
e	31,45	28,6	60,95	54,8	62,6	55,6
$a - e$	68,55	71,4	39,05	45,2	37,4	44,4
Δe	23,4	23,45	8,13	1,57	8,15	1,57
$\frac{\varphi_0}{\varphi_2}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{6}$
Lentille déplacée pour rétablir la distance focale	φ_2	φ_0	φ_2	φ_2	φ_0	φ_0
Quantité du déplacement lim. sup.	+ 3,90	+ 2,93	− 1,03	− 0,20	− 1,36	− 0,26
Quantité du déplacement lim. inf.	+ 2,93	+ 3,90	− 1,36	− 0,26	− 1,02	− 0,20

Dans les deux dernières lignes, le signe + signifie un déplacement par lequel la longueur de la lunette a est augmentée, et le signe —, un déplacement par lequel la lunette est raccourcie.

Il est évident que, dans la pratique, il n'existe pas de différence réelle entre les deux solutions A et B, car on évitera en tous cas les limites des inconnues. Prenons, pour chacun des cas, la moyenne arithmétique des deux solutions, et nous aurons:

	Lentille du milieu positive	Lentille du milieu négative 1e solution	2e solution
φ_0	— 298	+ 176	+ 77
φ_1	+ 164	— 57	— 11
φ_2	— 258	+ 152	+ 67
e	30	62	55
$a - e$	70	38	45

Ou bien, si l'on préfère que nous donnions les pouvoirs des lentilles en dioptries:

φ_0	— 3,35	+ 5,69	+ 12,96
φ_1	+ 6,09	— 17,56	— 90,91
φ_2	— 3,87	+ 6,57	+ 14,97.

La planche IV représente ces trois réponses. L'expérience devra montrer si la troisième solution vaut les deux premières. Elle a le désavantage que Δe y est très petit, et que par conséquent les divisions de l'échelle, qui donnera le grossissement, seront très serrées.

---

§ 10. L'ÉPAISSEUR DES LENTILLES.

Jusqu'ici nous avons négligé l'épaisseur des lentilles, mais elle ne peut être l'objet d'aucune difficulté, pourvu que, conformément à la théorie de Möbius, les distances focales soient comptées à partir des points principaux, et non à partir des surfaces. Les formules restent les mêmes, pourvu que, pour chaque lentille, on introduise tout l'espace entre les deux plans principaux, et que par chaque distance de deux lentilles l'on entende la distance des deux points principaux les plus rapprochés des deux lentilles. La seule quantité changée c'est la limite supérieure de f; car quand la lentille du milieu est poussée contre l'objectif ou contre l'oculaire, ces deux points principaux restent encore à quelque distance l'un de l'autre; mais il n'y aura aucune difficulté à en tenir compte.

---

11. DÉDUCTION PLUS SIMPLE DES ÉQUATIONS PRINCIPALES DU PROBLÈME.

Les deux formules:

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1,$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\varphi_1,$$

dont on tire aussi:

$$a = \varphi_0 + 4\varphi_1 + \varphi_2,$$

auraient pu être trouvées par un raisonnement très simple, car en considérant les lentilles comme positives, les rayons incidents parallèles, après avoir passé à travers l'objectif, se réuniront dans son foyer F. De là ils divergent vers la lentille du milieu, et après l'avoir passée ils se réunissent dans le foyer F′, qui sera le foyer conjugué de F. De là ils divergent encore vers l'oculaire, qu'ils quittent parallèlement à l'axe. Donc F′ est aussi le foyer de l'oculaire, comme F est le foyer de l'objectif.

Si en déplaçant *un peu* la lentille du milieu, la netteté des images ne doit pas en souffrir, il faut qu'il n'y ait aucun changement dans la distance des deux foyers conjugués F en F′, ce qui, comme on sait, n'est le cas que lorsque leur distance de la lentille moyenne est $2\varphi_1$ et que leur distance mutuelle est $4\varphi_1$.

Les deux équations:

$$e = \varphi_0 + 2\varphi_1,$$
$$a - e = \varphi_2 + 2\varphi_1,$$

s'en déduisent immédiatement.

---

§ 12. SOLUTION PLUS SIMPLE, EN NÉGLIGEANT LE DÉPLACEMENT DE L'OBJECTIF OU DE L'OCULAIRE.

Quand la lentille du milieu occupe sa position originale ou moyenne, la première image n'est ni agrandie ni réduite par cette lentille, le grossissement de la lunette est donc égal à $\frac{\varphi_0}{\varphi_2}$. Mais

si la lentille du milieu est avancée de la quantité très petite Δe, la distance de la première image à la lentille du milieu devient $2\varphi_1 - \Delta e$, et la distance de la lentille à la seconde image $2\varphi_1 + \Delta e$. Les dimensions des images sont proportionnelles à leur distance de la lentille; donc si la distance des deux foyers conjugués restait la même, nous aurions:

$$\frac{2\varphi_1 + \Delta e}{2\varphi_1 - \Delta e} \times \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{n+1}{n},$$

$$\frac{2\varphi_1 - \Delta e}{2\varphi_1 + \Delta e} \times \frac{\varphi_0}{\varphi_2} = 1,$$

d'où suivrait

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = \frac{2\varphi_1 + \Delta e}{2\varphi_1 - \Delta e} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

La théorie plus exacte, donnée plus haut, nous donnait pour cette proportion $\frac{2n+2}{2n+1}$ ou $\frac{2n+1}{2n}$, selon que l'oculaire ou l'objectif était employé pour régler la distance focale.

---

§ 13. LIEU DES DIAPHRAGMES INTERNES OU EXTERNES.

Les figures de la planche IV montrent clairement que, dans aucune des trois constructions de la lunette pancratique, il ne se forme une image réelle dans la lunette; donc il ne faudra mettre nulle part des diaphragmes. Reste à examiner si on ne pourrait pas placer près de l'œil un diaphragme laissant passer tous les rayons venant de l'objectif, ce qui est le cas lorsqu'il s'y forme une image réelle de l'objectif.

Nommons x la distance de la lentille du milieu jusqu'à l'image qu'elle forme de l'objectif, y la distance de l'oculaire jusqu'à l'image qu'il forme de cette image, et prenons x et y positifs quand ces distances sont du côté de l'œil, nous aurons

$$x = \frac{\varphi_1 e}{e - \varphi_2},$$

$$y = \frac{\varphi_2 (a - e - x)}{a - e - x - \varphi_2}.$$

En y substituant $e = \varphi_0 + 2\varphi_1$, on aura

$$x = \frac{\varphi_1 (\varphi_0 + 2\varphi_1)}{\varphi_0 + \varphi_1},$$

$$y = \frac{\varphi_2 (\varphi_0 \varphi_1 + \varphi_0 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2)}{\varphi_0 \varphi_1}.$$

Dans les trois solutions données plus haut, ces deux quantités sont négatives, savoir

$$x = -36{,}7 \qquad -29{,}7 \qquad -9{,}2,$$
$$y = -75{,}5 \qquad -122{,}1 \qquad -283{,}7,$$

il ne faut donc pas mettre de diaphragme du côté de l'œil.

Mais, en général, x et y seront négatifs. En effet, en prenant d'abord la lentille du milieu positive, nous avons

$$e = 2\varphi_1 + \varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0.$$

Mais $\varphi_1 - \varphi_0$ est négatif, donc $e < \varphi_1$. Les rayons partant du centre de l'objectif *divergent* donc après avoir traversé la lentille du milieu, et par conséquent y sera négatif.

Des rayons divergents traversant une lentille négative divergent encore davantage, l'oculaire est négatif; il n'y a donc pas d'image réelle derrière l'oculaire.

Considérons à présent la deuxième construction de la lunette pancratique, à lentille du milieu négative. Les rayons convergents, dessinés dans les figures, entre l'objectif et la lentille du milieu, deviennent divergents après avoir traversé celle-ci; et leur degré de divergence est précisément tel qu'après avoir traversé l'oculaire, ils quittent la lunette parallèlement à l'axe.

Mais les rayons qui partent du centre de l'objectif sont divergents; après avoir traversé la lentille du milieu, leur divergence est augmentée, et est toujours plus forte que celle des rayons dessinés dans la figure, et en considérant qu'après avoir traversé l'oculaire, ces derniers rayons sortent parallèles entre eux, nous en concluons que les premiers seront, en sortant, des rayons divergents.

§ 14. LA LUNETTE PANCRATIQUE PEUT-ELLE ÊTRE CONSTRUITE ACHROMATIQUEMENT?

Pour répondre à cette question, nommons les rayons de courbure des lentilles, dont est composée la lunette, r_1, r_2; r_3, r_4; r_5; r_6; positifs, quand la convexité est tournée vers l'objet; les indices de réfraction pour le rouge et le violet, n_r et n_v, n'_r et n'_v, n''_r et n''_v. Nous aurons

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour le rouge:} & \text{pour le violet:} \\ \varphi_0 = \dfrac{1}{n_r - 1} \cdot \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, & \varphi_0 = \dfrac{1}{n_v - 1} \cdot \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \\ \varphi_1 = \dfrac{1}{n'_r - 1} \cdot \dfrac{r_3 r_4}{r_4 - r_3}, & \varphi_1 = \dfrac{1}{n'_v - 1} \cdot \dfrac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} \\ \varphi_2 = \dfrac{1}{n''_r - 1} \cdot \dfrac{r_5 r_6}{r_6 - r_5}, & \varphi_2 = \dfrac{1}{n''_v - 1} \cdot \dfrac{r_5 r_6}{r_6 - r_5} \end{array}\right\} \quad . \ (52)$$

Si la lunette satisfait aux propriétés de la lunette pancratique pour les deux couleurs, les deux intervalles

$$(6) \qquad e = \varphi_0 + 2\varphi_1$$

et

$$(8) \qquad a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2,$$

doivent être égaux pour ces deux couleurs. Supposons l'objectif et la lentille du milieu formés de la même espèce de verre, et substituons les valeurs (52) de φ_0 et de φ_2 pour les deux couleurs dans l'équation (6), nous aurons l'équation

$$\frac{1_v}{n_r - 1}\left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + 2\,\frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3}\right) = \left(\frac{1}{n_v - 1} + 2\,\frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3}\right),$$

c'est-à-dire:

$$\frac{1}{n_r - 1} = \frac{1}{n_v - 1},$$

équation fausse. L'équation $a - e = 2\varphi_1 + \varphi_2$ donnerait une équation analogue, il s'en suit donc qu'il n'est pas possible que la lentille pancratique soit achromatique en employant une seule espèce de verre pour les lentilles.

Supposons donc ces espèces différentes, alors nous aurons les deux équations

$$e = \frac{1}{n_r - 1}\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \frac{2}{n'_r - 1}\,\frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} = \frac{1}{n_v - 1}\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \frac{2}{n'_v - 1}\,\frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3},$$

donc:

$$\left(\frac{1}{n_r - 1} - \frac{1}{n_v - 1}\right)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \left(\frac{1}{n'_r - 1} - \frac{1}{n_v' - 1}\right)\frac{2 r_3 r_4}{r_4 - {}_3} = 0,$$

ou bien

$$\frac{n_v - n_r}{(n_r - 1)(n_v - 1)}\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + \frac{n'_v - n'_r}{(n'_r - 1)(n'_v - 1)}\,\frac{2 r_3 r_4}{r_4 - r_3} = 0 \quad (53)$$

Prenons une couleur intermédiaire, pour laquelle les indices de réfraction des verres sont n_m, n'_m et n''_m, et pour laquelle on aura rigoureusement:

$$\varphi_0 = \frac{1}{n_m - 1}\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \qquad \varphi_1 = \frac{1}{n'_m - 1}\,\frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3}.$$

Supposons ensuite:

$$(n_r - 1)(n_v - 1) = (n_m - 1)^2,$$
$$(n'_v - 1)(n'_v - 1) = (n'_m - 1)^2,$$

ce qui ne peut pas être loin de la vérité, — du moins on pourra choisir les deux couleurs, que nous avons nommées rouge et violet, de telle sorte que ces équations soient vraies à peu de chose près —, et nous aurons:

$$\frac{n_v - n_r}{n_m - 1}\,\varphi_0 + 2\,\frac{n'_v - n'_r}{n'_m - 1}\,\varphi_1 = 0,$$

donc:

$$\frac{n'_v - r_r}{n'_m - 1} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\varphi_0}{\varphi_1}\,\frac{n_v - n_r}{n_m - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

De même nous aurons par l'équation (8):

$$\frac{n'_v - n'_r}{n'_m - 1} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\,\frac{n''_v - n''_r}{n''_m - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Les fractions:

$$\frac{n_v - n_r}{n_m - 1}, \quad \frac{n'_v - n'_r}{n'_m - 1}, \quad \frac{n''_v - n''_r}{n''_m - 1},$$

peuvent être regardées comme les pouvoirs dispersifs des trois lentilles dont se compose la lunette; nommons les d, d' et d'', alors on tirera de (54) et (55):

$$d' = -\tfrac{1}{2}\frac{\varphi_0}{\varphi_1} d = -\tfrac{1}{2}\frac{\varphi_2}{\varphi_1} d'',$$

ou bien

$$d : d' : d'' = \frac{2}{\varphi_0} : -\frac{1}{\varphi_1} : \frac{2}{\varphi_2},$$

ou en l'appliquant à notre exemple,

pour la lunette de la 1re construction $= \frac{1}{149} : \frac{1}{164} : \frac{1}{129}$;

" " " " " 2e " $= \frac{1}{88} : \frac{1}{57} : \frac{1}{76}$;

" " " " " 3e " $= \frac{2}{77} : \frac{1}{11} : \frac{2}{67}$.

Si nous voulons nous contenter d'une approximation, nous pourrons supposer l'objectif et l'oculaire formés de la même espèce de verre; il faudra alors prendre les moyennes de la première et de la troisième fraction. On voit en tout cas que le pouvoir dispersif des lentilles négatives doit être le plus fort; dans la 1re construction, le rapport est 1,18,

" " 2e " " " " 1,44,

" " 3e " " " " 6,5.

Les colonnes 1re, 4me et 7me de la table bien connue des coefficients de réfraction de Fraunhofer (Schumacher, *Astron. Abhandlungen*, 2e Heft, p. 31; Herschel, *Traité de la lumière*, traduit par Verhulst et Quételet, I, 243), m'ont donné pour les pouvoirs dispersifs

du crown-glass	n°. 9	. . . . .	0,0389
„ „	n°. 13	. . . . .	0,0383
„ „	lettre M	. . . . .	0,0439
„ flint-glass	n°. 13	. . . . .	0,0675
„ „	n°. 3	. . . . .	0,0650
„ „	n°. 30	. . . . .	0,0667
„ „	n°. 23	. . . . .	0,0673

En cas de besoin, il ne serait donc pas difficile de trouver deux espèces de verre, dont les pouvoirs dispersifs fussent dans la proportion de 1 à 1,18, ou de 1 à 1,44.

Pour rendre achromatique la lunette pancratique de la troisième espèce, le rapport des pouvoirs dispersifs devrait être de 1 à 6,5. Il n'est pas probable qu'on puisse composer deux espèces de verre qui satisfassent à cette condition, mais il resterait alors toujours un moyen, celui de rendre les verres tous les trois achromatiques. Mais, pour l'usage ordinaire, il n'est pas probable que le manque d'achromatisme soit gênant.

UTRECHT, 30 juillet 1877.

Cette note était déjà terminée, lorsque je reçus un exemplaire de la description très-claire de la lunette pancratique donnée par M. Donders lui-même. (Een pancratische kijker, door F. C. Donders, tiré des *Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool*, 3e reeks, deel V, blz. 1). L'auteur a donné la préférence à la première construction, celle dans laquelle la lentille du milieu est positive. On y trouve les formules suivantes de M. Grinwis:

Lentilles:

I. (Oculaire).	II. (Lentille du milieu).	III. (Objectif).
f	f'	f''

Soit:

$$-\frac{1}{f}=a \qquad \frac{1}{f'}=b \qquad -\frac{1}{f''}=c,$$

la distance de I et II $= \Delta$,
" " " II et III $= \Delta'$.

Etant donnés Δ et Δ', trouver le grossissement m:

$$m = \frac{b - a + ab\,\Delta}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$m = \frac{a}{b - c + bc\,\Delta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En comparant les notations de M. Grinwis avec les miennes, on verra que

a	b	c	Δ	Δ'	m

de M. Grinwis sont identiques à

$-\frac{1}{\varphi_2}$	$-\frac{1}{\varphi_1}$	$-\frac{1}{\varphi_0}$	$a-e$	e	V,

dont je me suis servi dans mes calculs.

En remplaçant ses lettres par les miennes, on retrouve les équations (9*a*) et (9*b*).

Les équations (3), (4) et (5) citées pas M. Donders se déduisent de ses équations (1) et (2).

On verra que M. Donders désire avoir la lunette pancratique encore plus courte que nous ne l'avons supposée; (dans l'exemple qu'il cite $a = 36{,}28$ millimètres); mais cela ne change pas notre théorie, qui reste toujours applicable.

Pour retrouver l'exemple $a = 12$, $b = 19$, $c = 11$ qu'il a choisi, il faudra mettre, selon notre notation, $a = 36{,}28$, $n = 5{,}5$ et $F = 20727$; en appliquant alors les formules (35), on trouvera

$$\alpha = 45^\circ\ 5',6,$$
$$\log q = 9{,}7626 \text{ donc } q = 0{,}5789,$$
$$\varphi_2 = -83{,}33,$$
$$\varphi_0 = -90{,}91,$$
$$\varphi_1 = +52{,}63,$$

qui correspondent à 12, 11 et 19 dioptries.

Pour la position moyenne de la lentille du milieu on aura:

$$e = \varphi_0 + 2\,\varphi_1 = 14{,}35,$$
$$a - e = 21{,}93,$$

ensuite $$\Delta e = \frac{\varphi_1}{2n+1} = 4{,}39,$$

enfin pour la limite supérieure de $V = \frac{13}{11}$,

$$\Delta a = \frac{\varphi_1}{(2n+1)(2n+1)} = 0{,}34,$$

et pour la limite inférieure $V = 1$,

$$\Delta a = \frac{\varphi}{2n(2n+2)} = 0{,}40,$$

ce qui s'accorde parfaitement avec les nombres de M. Donders, car

$$21{,}93 - 17{,}54 = 4{,}39$$
$$\text{et } 36{,}68 - 36{,}28 = 0{,}40.$$

Pour construire une lunette pancratique à lentille du milieu négative, il faudra prendre la valeur de f plus grande; car on trouve pour cette quantité, en posant $n = 5{,}5$:

une limite inférieure . . . . . = 575 a,
et une limite supérieure. . . . . 1915 a,
tandis que chez nous. . . . . F = 571 a.

En prenant par exemple $n = 5{,}5$, $a = 36{,}28$, $F = 700\,a = 25396$ on aura les solutions suivantes:

	φ_0	φ_1	φ_2	e	$a-e$
1re Solution	— 108,1	+ 61,0	— 99,5	13,9	22,5
2e „	+ 65,4	— 22,3	+ 60,2	20,8	15,6
3e „	+ 26,6	— 3,7	+ 24,4	19,2	17,0

UTRECHT, 28 septembre 1877.

SUR DES

LUNETTES À GROSSISSEMENT VARIABLE,

PAR

J. BOSSCHA.

---

1. Sous le nom de lunette pancratique M. Donders a décrit un appareil qui se compose de trois lentilles, dont celle du milieu peut avancer ou reculer par rapport aux deux autres. Par ce déplacement, la grandeur apparente sous laquelle l'appareil montre un objet éloigné, est modifiée entre certaines limites. Mais ce moyen présente un inconvénient, à savoir que l'œil de l'observateur, lorsque la lentille intermédiaire change de position, doit s'accommoder à une autre distance, et n'est bientôt plus en état de suivre le déplacement de l'image. Si, par exemple, l'appareil est pour une certaine position de la lentille intermédiaire une lunette véritable, d'où les rayons entrés parallèles sortent parallèles, il cessera d'être une lunette de ce genre, aussitôt qu'on aura déplacé la lentille mobile.

Pour ne pas rendre trop gênant le défaut qui en résulte dans la netteté de la vision, on est obligé de renfermer entre d'étroites limites le déplacement de la lentille du milieu; mais alors les variations du grossissement, qui sont proportionnelles à ce déplacement, ne peuvent pas non plus s'étendre très loin.

2. Un moyen simple de lever cette difficulté est fourni par l'étude de la manière dont trois lentilles doivent se mouvoir les unes par rapport aux autres, pour que la distance focale du

système, supposée infiniment grande dans une des positions, le reste dans toutes les autres.

Soient, en effet, trois lentilles centrées sur un même axe, et dont φ_1, φ_2 et φ_3 désignent, par rang d'ordre, les distances focales; d_1 étant la distance des deux premières lentilles, d_2 celle des deux dernières. La distance focale principale f du système est alors déterminée par la relation:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_3}-d_1\left(\frac{1}{\varphi_1\varphi_2}+\frac{1}{\varphi_1\varphi_3}\right)-d_2\left(\frac{1}{\varphi_1\varphi_3}+\frac{1}{\varphi_2\varphi_3}\right)+\frac{d_1 d_2}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3},$$

qui peut aussi être écrite de cette manière:

$$\left[d_1-(\varphi_1+\varphi_2)\right]\left[d_2-(\varphi_2+\varphi_3\right]=\varphi_2\left(\varphi_2-\frac{\varphi_1\varphi_3}{f}\right). \quad (1)$$

Si l'appareil est une lunette, on a $f=\infty$ et par conséquent:

$$\left[d_1-(\varphi_1+\varphi_2)\right]\left[d_2-(\varphi_2+\varphi_3)\right]=\varphi_2{}^2,$$

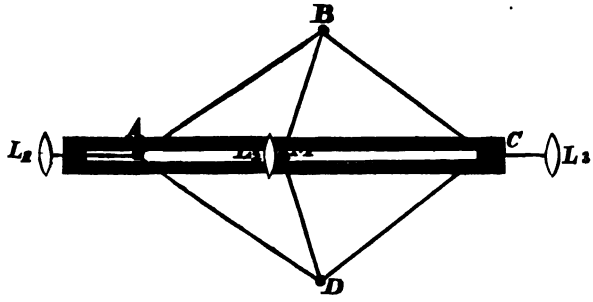
ou

$$D_1 D_2=\varphi_2{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en représentant par D_1 la distance du foyer postérieur de la première lentille au foyer antérieur de la seconde, et par D_2 la distance du foyer postérieur de la seconde lentille au foyer antérieur de la troisième.

Cette relation montre que, par le déplacement seul de la lentille intermédiaire, d'où résultent pour D_1 et D_1 des changements égaux en valeur mais de sens opposé, il ne peut être satisfait à la condition que l'appareil reste une lunette véritable.

Mais on obtient un appareil dans lequel les trois verres changent automatiquement leur position de la manière requise, en reliant les lentilles au losange articulé de Peaucellier, une combinaison de six tiges unies à charnière, dont quatre, AB, BC, CD et DA forment un losange, tandis que les deux autres, BM et DM, joignent les deux sommets opposés B et D



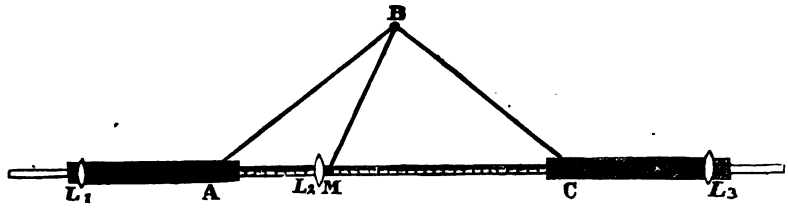
Lorsque la charnière M se meut vers A ou vers C, le losange change de forme, de telle sorte qu'on a toujours la relation

$$AM \,.\, MC = AB^2 - BM^2,$$

qui est indentique à (2) si l'on fait $AM = d_1 - (\varphi_1 + \varphi_2) = D_1$, $MC = d_2 - (\varphi_2 + \varphi_3) = D_2$. Si l'on place la lentille intermédiaire au-dessus de M, la première lentille à une distance $AL_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ en dehors de A, la dernière lentille à une distance $CL_2 = \varphi_2 + \varphi_3$ en dehors de C, et si en outre le losange est de dimensions telles qu'on ait $AM = MC = \varphi_2$ lorsque les tiges BM et MD sont dans le prolongement l'une de l'autre, la relation (2) sera satisfaite pour toutes les formes du losange et l'appareil fera sortir parallèlement les rayons incidents parallèles.

Le même losange peut servir pour différents systèmes de trois lentilles, dans lesquels la lentille intermédiaire est la même. Si on veut l'adapter aussi à l'emploi de différentes lentilles intermédiaires, on n'a qu'à allonger ou raccourcir les bras BM et DM, ou bien à faire subir le changement inverse aux côtés du losange.

3. Pendant le mouvement de va-et-vient de M, on peut maintenir fixe soit le point A, soit le point C. Dans le premier cas l'objectif reste en place, dans le second l'oculaire. Si ni l'un ni l'autre n'est exigé, on peut rendre fixe le point M et employer alors, au lieu d'un losange articulé, un mouvement de bielle; c'est ce que représente la fig. 2,



où les bras AB et BC, reliés en B avec la manivelle BM, sont forcés à leurs autres extrémités A et C, par des curseurs, à se mouvoir avec les lentilles L_1 et L_2 sur la droite $L_1 M L_2$.

4. On peut également imposer au système optique la condition que la distance focale, tout en n'étant pas infiniment grande, reste pourtant constante, par éxemple, $= a$. Dans ce cas, on doit avoir:

$$D_1 D_2 = \varphi_2 \left(\varphi_2 - \frac{\varphi_1 \varphi_3}{a}\right).$$

A cet effet, le losange doit satisfaire à la condition:

$$AB^2 - BM^2 = \varphi_2 \left(\varphi_2 - \frac{\varphi_1 \varphi_3}{a}\right).$$

5. La supposition que l'appareil soit une lunette proprement dite, à distance focale infinie, en borne l'emploi à l'observation d'un objet infiniment éloigné, par un œil normal, sans aucun effort d'accommodation. Mais on peut poser le problème d'une manière plus générale, et demander comment les lentilles extrêmes doivent se déplacer par rapport à la lentille du milieu pour qu'un objet, situé à une distance donnée en avant du premier verre, soit vu nettement derrière le troisième par un œil à distance visuelle déterminée; en autres termes, pour que l'image se forme toujours à la même distance du troisième verre.

Désignons par a la distance de l'objet au premier verre, par b la distance de l'image au dernier verre, ces deux distances étant regardées comme positives lorsqu'elles se trouvent en dehors des verres extrêmes; soient, en outre, f_1 la distance du premier

foyer du système optique au premier verre, f_2 la distance du second foyer au dernier verre, et enfin f la distance focale principale du système, c'est-à-dire, la distance des foyers aux points nodaux correspondants; on a alors, comme on sait,

$$(a - f_1)\,(b - f_2) = f^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Dans un système de trois lentilles, on a, en outre:

$$f_1 = \varphi_1 \frac{D_2\,(D_1 + \varphi_1) - \varphi_2{}^2}{D_1\,D_2 - \varphi_2{}^2},$$

$$f_2 = \varphi_3 \frac{D_1\,(D_2 + \varphi_3) - \varphi_2{}^2}{D_1\,D_2 - \varphi_2{}^2},$$

$$f = \frac{\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3}{D_1\,D_2 - \varphi_2{}^2},$$

valeurs au moyen desquelles, après quelques réductions, la relation (3) peut s'écrire sous la forme:

$$(D_1 D_2 - \varphi_2{}^2)\,\{(D_1 - C_1)\,(D_2 - C_2) - \varphi_2{}^2\} = 0, \quad \ldots (4)$$

si l'on pose, pour abréger,

$$C_1 = \frac{\varphi_1{}^2}{a - \varphi_1}; \quad C_2 = \frac{\varphi_3{}^2}{b - \varphi_3}.$$

Le déplacement des lentilles s'opère donc conformément aux conditions posées quand on a, ou bien

$$D_1\,D_2 = \varphi_2{}^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ou bien

$$(D_1 - C_1)\,(D_2 - C_2) = \varphi_2{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

La première condition (5) n'est évidemment pas applicable en ce cas. La seconde fait voir qu'ici encore le losange de Peaucellier ou le mouvement de bielle donneront automatiquement aux verres le déplacement requis. Les lentilles extrêmes doivent maintenant se trouver aux distances

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_1{}^2}{a - \varphi_1}$$

et

$$\varphi_2 + \varphi_3 + \frac{\varphi_3{}^2}{b - \varphi_3}$$

en dehors des sommets extrêmes du losange.

6. Même sans connaître la valeur de la distance a et de la dis-

tance visuelle b, on peut facilement obtenir, à l'aide d'un artifice, la mise au point exacte des lentilles extrêmes.

Remarquons, à cet effet, que lorsque l'objet est infiniment éloigné, la relation (6) devient

$$D_1 (D_2 - C_2) = \varphi_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

de même que, pour un œil voyant nettement à une distance infinie, elle deviendrait, si l'objet se trouvait à la distance a de l'objectif,

$$(D_1 - C_1) D_2 = \varphi_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Une fois les côtés et les bras transversaux du losange amenés aux dimensions convenables, de sorte qu'on ait $AM^2 - BM^2 = \varphi_2^2$, et la lentille antérieure placée à la distance $\varphi_1 + \varphi_2$ en dehors de A, on pourra chercher, en faisant mouvoir la troisième lentille, la position pour laquelle un objet très éloigné est vu nettement par l'œil de l'observateur. Comme on a alors, d'après (7),

$$D_1 (D_2 - C_2) = \varphi_2^2,$$

la lentille postérieure se trouve aussi dans la position requise pour la vision distincte d'objets rapprochés.

Seulement, pour qu'il soit satisfait à l'équation (6)

$$(D_1 - C_1)(D_2 - C_2) = \varphi_2^2,$$

la lentille antérieure doit encore être déplacée de la quantité C_1. On y arrive facilement en visant l'objet placé à la distance a et en faisant mouvoir la lentille jusqu'à ce que l'image soit aussi nette que possible.

7. Par grossissement des lunettes on entend le rapport entre les angles sous lesquels sont vus l'objet et l'image, le premier étant observé du centre de l'objectif, la seconde du centre de l'anneau oculaire.

Dans un système de trois lentilles, ce rapport a pour expression

$$V = \frac{D_2 (D_1 + \varphi_1) - \varphi_2^2}{\varphi_2 \varphi_3}.$$

Lorsque l'appareil est une lunette proprement dite, ou astronomique, et que par conséquent $D_1 D_2 - \varphi_2^2 = 0$, on a

$$V = \frac{D_2 \varphi_1}{\varphi_2 \varphi_3}.$$

Le grossissement est donc proportionnel à la distance des centres de rotation M et C du losange. Si on le connaît pour une certaine valeur de D_2, il suffit, étant donné un état quelconque du losange, de mesurer D_2, pour avoir le grossissement de la lunette dans le cas donné. Une échelle divisée en parties égales, entre M et C, permettra la lecture directe du grossissement.

8. Lorsqu'on entend par grossissement du système optique le rapport des vraies grandeurs de l'image et de l'objet, il existe également une relation simple entre le grossissement et la distance MC.

Ce rapport V_1 est, en effet,

$$V_1 = -\frac{b - f_2}{f} = -\frac{f}{a - f_1},$$

ou, en remplaçant f, f_1 et f_2 par leurs valeurs,

$$V_1 = -\frac{\varphi_3}{\varphi_1 \varphi_2} \frac{C_1}{C_2} (D_2 - C_2).$$

La détermination pratique du rapport V_1, pour les différentes positions du losange, n'offre donc pas plus de difficulté que n'en présente, dans le cas de la lunette proprement dite, la détermination du rapport V des angles sous lesquels sont vus l'image et l'objet.

9. Dans le *Mémorial de l'officier du Génie*, nº 18 (1868), p. 350 et suiv., M. Peaucellier a lui-même décrit une application de son losange à des lunettes à grossissement variable. Son but était de construire un stadiomètre, permettant de lire directement sur l'instrument la distance à mesurer. Il se servait, à cet effet, d'une lunette qui avait un objectif composé de deux verres, dont le second pouvait être reculé. Une ligne horizontale de longueur fixe étant placée sur le terrain au point dont il s'agissait de mesurer la distance, on pouvait ajuster l'objectif de manière que cette ligne, vue dans la lunette, fût bornée par deux fils verticaux, tendus dans le plan focal de l'oculaire. Du déplacement de la seconde lentille

de l'objectif on pouvait alors déduire la distance à mesurer, si les deux lentilles étaient reliées au losange articulé, de telle sorte que la seconde lentille fût placée au point M. Cette distance était indiquée par le déplacement d'un vernier placé au point C le long d'une échelle divisée. M. Peaucellier ajoute:

„Pendant la course du verre mobile qui peut atteindre jusqu'à 2 centimètres, la vision de l'image se trouble et nécessite par intervalles le rétablissement de la mise au point. Cette circonstance ne laisserait pas de prolonger la durée de l'observation, si on ne l'avait éludée en rendant l'appareil automateur, c'est-à-dire en le dotant d'un organe particulier, maintenant sans interruption la coïncidence du plan du réticule avec le plan focal variable de la lunette. Cet organe consiste dans un système articulé fort simple, dont les diverses parties sont déterminées de manière à satisfaire à la condition précitée. Il en résulte que malgré le déplacement de la lentille mobile, la vision conserve sa netteté et que l'observation se fait aussi rapidement que si l'image était fixe."

A l'aide de son losange et d'un second appareil, au sujet duquel il n'entre dans aucun détail, M. Peaucellier a donc déjà su résoudre, d'une manière un peu plus compliquée, paraît-il, un problème semblable à celui dont nous nous sommes occupé dans la présente note.

SUR LA DÉTERMINATION

DES

DISTANCES FOCALES DES LENTILLES À COURT FOYER,

PAR

J. A. C. OUDEMANS.

Dans les recherches relatives à la composition des instruments optiques, il arrive souvent qu'on désire connaître avec quelque précision la distance focale de petites lentilles. Théoriquement, on peut y parvenir de différentes manières à l'aide de la formule fondamentale de la dioptrique, en tenant compte de la situation des points principaux; la question de savoir si l'on atteindra dans la mesure l'exactitude voulue dépend donc seulement du mode opératoire et de l'exécution.

Bessel [1]) a fait connaître la méthode qu'il a employée pour déterminer la distance focale de l'objectif de l'héliomètre de Königsberg. Voici comment il la décrit.

„La lunette fut enlevée de l'instrument. Après en avoir retiré le tube oculaire, on la plaça horizontalement sur deux supports fixés à un traîneau, qui pouvait glisser dans deux rainures parallèles sur une table basse et solide, de manière que l'axe de l'objectif ne changeât pas de position durant le mouvement. Au-dessus de la lunette et parallèlement à son axe était disposée une solive dont la longueur, 33 pieds de Paris, surpassait un peu le quadruple de la distance focale; la solive

[1]) *Astronomische Untersuchungen*, t. I, p. 137.

était fixée sur 6 appuis solides, de telle sorte qu'une de ses deux arêtes supérieures se trouvât verticalement au-dessus de l'axe (ou de son prolongement), et que par conséquent celui-ci fût coupé par des fils à plomb suspendus à l'arête en question. A l'une des extrémités de cet appareil était placé un oculaire, devant lequel pendait un fil à plomb attaché à la solive; en faisant glisser convenablement l'oculaire dans son tube, on pouvait voir distinctement ce fil. Un second fil à plomb était suspendu à un point de la solive situé près de son autre extrémité. On faisait glisser la lunette jusqu'à ce que les deux fils à plomb fussent vus avec une netteté parfaite dans l'oculaire; la position de la lunette, où cette condition se trouvait remplie, était déterminée au moyen d'un troisième fil à plomb, suspendu à la solive et en contact avec une échelle attachée à la lunette. La lunette était ensuite amenée dans la seconde position où les deux fils à plomb reparaissaient nettement, et cette position était également déterminée par l'observation du point de l'échelle que rencontrait maintenant le troisième fil à plomb. Pour bien voir l'image de A, il faut obscurcir la chambre dans laquelle on exécute les mesures, et ne laisser tomber la lumière sur l'objectif que par une fente étroite. Comme fils à plomb, on a pris des cheveux humains. L'oculaire dont on a fait usage grossit environ 85 fois [1]) quand il remplit sa fonction ordinaire dans l'héliomètre; par conséquent, environ 170 fois dans l'emploi actuel, qui le porte à une distance double de l'objectif.

La distance A B (= E) entre les deux fils à plomb était mesurée à la toise, sur la face supérieure soigneusement aplanie de la solive à laquelle ils étaient suspendus; la distance (e) des deux positions de l'objectif O O′ était donnée directement par l'échelle."

A l'aide de ces deux grandeurs mesurées et de la distance x des deux points principaux de l'objectif, on trouve alors, comme le fait voir Bessel, la distance focale par la formule simple

[1]) Comme la distance focale de l'objectif était de 1134 lignes de Paris, celle de l'oculaire employé était d'environ $\frac{1134}{85} = 13\frac{1}{3}$ lignes.

$$4f = E - x - \frac{ee}{E - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

L'avantage de cette méthode, c'est qu'on n'est pas obligé de mesurer les distances d'un fil à la face antérieure ou postérieure de l'objectif, et comme, en outre, la distance mesurée E, après soustraction des petits termes x et $\frac{ee}{E - x}$, est divisée par 4, les erreurs inévitables de la mesure n'ont qu'une influence réduite sur le résultat.

Il m'a semblé que cette méthode pourrait convenir aussi pour de petites lentilles, telles que celles dont se composent les oculaires, et, d'après mes indications, M. Kagenaar, aide au laboratoiré physiologique de l'université d'Utrecht, a construit un appareil au moyen duquel, en ne dépassant pas certaines limites, on peut déterminer très facilement les mêmes grandeurs dont s'était servi Bessel. Un Mémoire de Hansen, intitulé *Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen*, et publié en 1871 par la Société royale saxonne des sciences, montre que Hansen a aussi fait usage d'un appareil analogue. Il n'a toutefois donné aucun détail quant à l'exactitude atteinte.

D'autres méthodes encore ont été employées dans le même dessein. Lorsque la source lumineuse est placée, sur l'axe de la lentille, à une distance double de la distance focale, la grandeur de l'image est égale à celle de la source. C'est là-dessus que repose la méthode de M. Donders, qui consiste à mesurer d'abord avec un ophthalmomètre la grandeur de la source lumineuse, et ensuite, soit à faire avancer ou reculer la lentille jusqu'à ce que l'image présente exactement la même grandeur, soit (ce qui mérite incontestablement la préférence) à mesurer aussi la grandeur de l'image pour différentes positions de la lentille. Quand on applique le premier procédé, la distance de la lentille à la source lumineuse est le double de la distance focale (ou, mieux encore, la distance de la source à l'image est le quadruple de la distance focale); quand on a recours au second, cette distance focale est

trouvée par un calcul très facile. Mais, ainsi que le remarque M. Snellen, tout le monde ne dispose pas d'un ophthalmomètre; en outre, la méthode offre l'inconvénient qu'on ne peut s'en servir pour déterminer directement les grandes distances focales, celles des lentilles faibles, et qu'on a, dans chaque détermination, à tenir compte de la situation des plans principaux de la lentille.

M. Snellen lui-même a imaginé et fait construire par M. Kagenaar un appareil à coup sûr fort ingénieux, le *phacomètre*.

La description de cet instrument se trouve dans le *Maandblad voor Natuurwetenschappen*, 7e année, n°. 2. Il est disposé de telle sorte que la source lumineuse et le tableau sur lequel est reçue l'image se meuvent simultanément et d'une quantité égale en sens opposé, — se rapprochent ou s'éloignent tous les deux de la lentille. Comme source lumineuse on emploie un écran noir percé de petites ouvertures, derrière lequel se trouve un verre dépoli, qui est éclairé par la lumière parallèle d'une lampe à pétrole placée au foyer d'une lentille. L'image est reçue sur un second petit écran de verre dépoli, sur lequel est dessinée exactement la figure des ouvertures qui constituent la source lumineuse. Pour la forme de cette source, M. Snellen a choisi la figure de trois points en ligne droite, dont deux sont rapprochés l'un de l'autre, comme dans l'ophthalmomètre; il y a deux de ces figures, l'une horizontale, l'autre verticale. Comme le dessin tracé sur l'écran est égal à ces figures et semblablement placé, un point isolé de l'image renversée doit toujours tomber entre deux points rapprochés. Par là on peut contrôler exactement si la source lumineuse et l'image ont la même grandeur et sont par conséquent restées à la même distance de la lentille. La lentille qu'on veut examiner est placée à égale distance entre deux autres lentilles, laissées à demeure dans l'appareil; cette disposition rend celui-ci applicable aussi à la détermination des lentilles à grande distance focale. L'échelle le long de laquelle se meut l'écran n'est pas divisée en parties égales, en millimètres, mais fait connaître directement le pouvoir de la lentille en dioptries, ce qui est plus commode pour les verres de besicles.

Pour de plus amples détails, je renvoie à la description donnée dans le journal cité ci-dessus.

Bien que, pour l'emploi auquel il est destiné, à savoir la détermination de la force d'un verre de besicle équiconvexe, l'appareil en question puisse être regardé comme parfait, à raison de la facilité, de la rapidité et de l'exactitude avec lesquelles la détermination se laisse exécuter, je ne l'ai pas encore jugé suffisant pour l'objet que j'avais en vue. „L'échelle", dit M. Snellen lui-même, „est calculée exclusivement pour des lentilles symétriques, biconvexes. Pour les lentilles plan-convexes ou périscopiques, on fera bien d'accoler deux verres de même force, de manière à obtenir une forme symétrique. Une pareille lentille double aura en général plus d'épaisseur que les verres pour lesquels l'échelle a été calculée; il sera donc nécessaire de réduire l'échelle, d'après la situation des plans principaux".

On pourrait objecter qu'il faudra alors avoir toujours deux lentilles de même force et de même forme, ce qui est rarement le cas, sauf quand il s'agit de verres de besicles. Mais, par contre, la remarque se présente d'elle-même qu'une lentille unique, non équiconvexe, se prêterait tout aussi bien à la détermination de sa distance focale, à condition d'être placée dans l'appareil de façon que ses deux plans principaux soient symétriques par rapport au plan médian entre les deux lentilles auxiliaires. Une lentille plan-convexe devrait donc être avancée d'environ un tiers de son épaisseur du côté de sa face plane, soit que cette face regarde la source lumineuse, soit qu'on l'ait tournée vers l'écran. Le moyen d'opérer ce déplacement manque dans le phacomètre; peut-être, toutefois, serait-il facile de donner à l'instrument la disposition nécessaire. Ces objections perdent d'ailleurs toute valeur si l'on considère que, lorsque la lentille se trouve, des deux côtés, par rapport à la source lumineuse et à l'image, à la distance $2f$, un petit déplacement x de la lentille ne fait subir à la distance $4f$ de la source à l'image qu'un accroissement du second ordre, $\frac{x^2}{f \pm x}$, quantité qui peut toujours être négligée dans la pratique.

Il m'a paru aussi que, s'il s'agit d'atteindre au plus haut degré d'exactitude dont ces mesures sont susceptibles, la détermination du point où une image sur verre dépoli devient parfaitement nette n'offre pas une précision suffisante; que, par exemple, cette détermination peut difficilement se faire à ¼ de millimètre près, tandis que par la méthode de Bessel on obtiendrait peut-être sans peine une exactitude de $\frac{1}{10}$ de millimètre. J'ai, en conséquence, fait construire un appareil analogue au phacomètre, *mutatis mutandis*. Le pied central, qui est nécessaire au phacomètre, est devenu inutile dans la nouvelle disposition, où il a été remplacé (voir Pl. IV) par deux pieds, ce qui donne plus de stabilité à l'appareil quand, pour l'emploi, il est placé sur une table. La fig. 1 de la planche représente l'instrument vu de côté. Le long de la règle *a*, qui a une section en queue d'aronde et est munie en dessous d'un renfort vertical, peuvent glisser quatre pieds, dont le premier est fixé sur la règle au moyen de la vis *d*; ce pied porte en haut le petit tube *b*, susceptible d'être un peu déplacé latéralement à l'aide de la vis *g* et du ressort *f* (voir aussi la fig. 3); dans ce tube *b* on introduit par derrière un oculaire de Ramsden *c*, et par devant un tube court *e*, sur l'ouverture antérieure duquel est tendu verticalement un cheveu humain. Le second pied porte une colonnette *h* (voir aussi fig. 4), dans laquelle peut se mouvoir verticalement une petite tige ronde, qui reçoit par en haut, entre les deux angles *m*, la lentille *p* dont on veut déterminer la distance focale. Le troisième pied porte le tube *q* (voir aussi fig. 5), dont l'axe est dirigé parallèlement à la longueur de la règle; dans ce tube peut être introduit un autre tube *r*, dont l'ouverture tournée vers la lentille est munie d'un second cheveu vertical. Le tube est entouré d'un écran *s*, servant à intercepter la lumière de la lampe à pétrole *t*, qui repose sur le quatrième pied. Les axes des tubes *b* et *q* ont une hauteur égale et invariable. A la colonnette *h*, qui porte la lentille, peut aussi être imprimé nn mouvement latéral, au moyen de la vis *k* qui la presse contre le ressort *o*.

Sur la règle est tracée une division en millimètres; les pieds de la colonnette h et du tube q sont pourvus de verniers permettant de lire les dixièmes de millimètre et que nous appellerons respectivement vernier I et II.

Lorsqu'on enlève la colonne h (pour cela, il faut d'abord retirer de la règle l'écran s et la lampe t), et qu'on rapproche les bords des tubes r et e, de manière que les fils tendus devant leurs ouvertures se touchent, le vernier de s doit marquer exactement le zéro de l'échelle; s'il y a une différence, il faut en tenir compte. Lorsque l'écran est placé comme le montre la fig. 1, le vernier II indique, sauf correction éventuelle pour cette erreur d'index, la distance des deux cheveux.

Quand on veut déterminer la distance focale d'une lentille p, on commence par l'estimer grossièrement, par exemple au moyen du soleil, puis on prend la longueur er de quelques centimètres plus grande que 4 fois cette distance focale; il y aura alors pour la lentille p deux positions où elle projettera exactement en e l'image du cheveu tendu en r. L'œil appliqué à l'oculaire c doit donc voir à la fois les deux cheveux, nettement, sans la moindre parallaxe. Dans la première position, celle que représente la fig. 1, et où la lentille p est plus rapprochée de e que de r, on voit à côté du cheveu e une image réduite du cheveu r; dans l'autre position, où l'on a $pe > pr$, on voit au contraire une image amplifiée. Si dans chacune de ces positions on note l'indication du vernier I, la différence de ces lectures donne le déplacement e. Le vernier II, corrigé au besoin de l'erreur du zéro, donne la distance E des deux cheveux, de sorte qu'on n'a plus besoin que de connaître la distance $\varkappa$ des points nodaux de la lentille pour pouvoir calculer la distance focale au moyen de la formule

$$f = \frac{1}{4}\left(\mathrm{E} - \varkappa - \frac{e^2}{\mathrm{E} - \varkappa}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En faisant varier la distance E, on obtient des déterminations différentes.

Le principe sur lequel l'appareil et son emploi reposent n'est donc pas nouveau; il s'agissait seulement de décider

par l'expérience si l'on pouvait en obtenir l'exactitude désirée.

Pour une première épreuve je pris une lentille dont je me sers habituellement comme loupe; son épaisseur, mesurée avec le sphéromètre du cabinet de physique de l'université d'Utrecht, était $d = 3,^{mm}30$, et le rayon de courbure des deux faces, antérieure et postérieure, $= 41$ mm. Ce dernier fut trouvé au moyen de petits morceaux de papier, qui étaient découpés suivant des arcs de cercle à rayon croissant successivement de 1 mm., et dont on essayait l'adaptation aux faces de la lentille.

La manière la plus simple de calculer la distance $\varkappa$ des points principaux est peut-être la suivante. Les rayons de courbure r et r' des faces antérieure et postérieure étant pris positifs quand le centre de courbure se trouve du côté où la lumière sort de la lentille, soit d l'épaisseur de la lentille, et posons

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{n-1}{n}\, d, \\ \text{on a alors} \quad \varkappa &= \delta - \frac{\delta^2}{(n-1)(r-r'-\delta)} = \delta + \frac{f\delta^2}{rr'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Si la lentille est équiconvexe, comme dans le cas de notre loupe, on a $r' = -r$, par conséquent

$$\varkappa = \delta - \frac{\delta^2}{(n-1)(2r-\delta)} = \delta - \frac{f\delta^2}{r^2},$$

ou pour la loupe, en supposant $n = 1,53$,

$\delta = 1,1764$, $\varkappa = 1,142 - 0,030 = 1^{mm},11$ [1]), valeur pour laquelle on a pris $1^{mm},1$.

[1]) Pour les lentilles équiconvexes, on peut aussi éviter la mesure ou le calcul du rayon de courbure, pourvu qu'on ait mesuré la distance focale à partir de la face postérieure ou du centre. On a, en effet,

$$\varkappa = (n-1)\frac{d}{n} - \frac{1}{4f}\left(\frac{d}{n}\right)^2 + \frac{1}{8(n-1)f^2}\left(\frac{d}{n}\right)^3 - \frac{5}{64(n-1)^2 f^3}\left(\frac{d}{n}\right)^4 + \text{etc.}$$

ou

$$\frac{\varkappa}{f} = (n-1)\frac{d}{fn} - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{fn}\right)^2 + \frac{1}{8(n-1)}\left(\frac{d}{fn}\right)^3 - \frac{5}{64(n-1)^2}\left(\frac{d}{fn}\right)^4 + \text{etc.}$$

On peut donc prendre d'abord $\varkappa = (n-1)\frac{d}{n}$, en déduire une valeur meilleure de f, laquelle donnera à son tour une valeur plus exacte de $\varkappa$, et ainsi de suite.

Si la lentille est plan-convexe, on a r ou $r' = \infty$ et $\varkappa = \delta$. En admettant que le coefficient de réfraction de la lentille soit égal à 1,53, on trouve pour la distance focale

$$f = \frac{1,53}{0,53} \times \frac{41^2}{1,53 \times 82 - 0,53 \times 3,3} = 39,2.$$

La distance des deux cheveux doit donc être plus grande que $156,8 + 1,1 = 157^{mm},9$.

Au lieu de chercher la correction du vernier II en amenant les deux cheveux en contact l'un avec l'autre, j'ai préféré la déterminer en relevant au compas, pour différentes positions, la distance des anneaux sur lesquels les cheveux étaient tendus, mesurant sur l'échelle elle-même l'écartement des pointes de ce compas, et le comparant avec l'indication du vernier.

La correction du vernier I est éliminée, attendu qu'on n'a besoin que du déplacement de la lentille et qu'on obtient celui-ci en prenant la différence de deux indications du vernier.

J'ai fait sur ma lentille 10 déterminations, chaque fois avec une valeur différente de E; pour chacune d'elles, toutefois, la position de la lentille était cherchée deux fois, et, en cas d'accord insuffisant, encore une troisième fois. Voici les lectures faites, toutes en millimètres:

Lect. vernier II + 0,3.	Lect. vernier I.				
E	1ère Lect.	2de Lect.		e	f
240	189,7	49,4	140,3	140,4	39,18
	189,8	49,3	140,5		
230	179,2	50,1	129,1	129,075	39,03
	179,15	50,1	129,05		
220	168,12	51,0	117,12	117,14	39,05
	168,16	51,0	117,16		
210	157,1	51,9	105,2	105,1	39,01
	157,0	52,0	105,0		

Lect. vernier II + 0.3.	Lect. vernier I.				
E	1ère Lect.	2de Lect.		e	f
200	145,3	53,26	92,04	92,0	39,09
	145,2	53,25	91,95		
190	134,0	55,35	78,65	78,7	39,03
	133,7	54,7	79,9		
	134,0	55,5	78,5		
180	121,7	57,6	64,1	64,075	38,99
	121,5	57,45	64,05		
170	108,2	61,73	46,47	46,51	39,02
	108,0	61,45	46,55		
160	92,5	68,9	23,6	22,3	38,94
	89,4	68,75	20,65		
	90,55	68,0	22,55		
158	84,8	73,2	11,6	11,675	39,01
	84,8	73,05	11,75		

La moyenne des dix déterminations est: 39,03 mm.
l'erreur probable de chaque détermination: ± 0,03 „
„ „ „ la moyenne arithm.: ± 0,01 „

Comme second exemple, je citerai l'examen des quatre lentilles dont se composait un oculaire terrestre. Pour chaque lentille j'ai pris deux distances des cheveux; pour chaque valeur de E, la détermination des deux positions ou l'un des cheveux coïncidait avec l'autre a été exécutée deux fois; l'épaisseur des lentilles, respectivement 1,49, 3,12, 1,73 et 2,73 millimètres, avait été mesurée au sphéromètre; et, pour déterminer les distances des points principaux, on avait de nouveau adopté comme coefficient de réfraction $n = 1,53$. Une fois connue une valeur approchée de la distance focale, on peut naturellement, après avoir mesuré le rayon de courbure, procéder à une détermination exacte de n.

J'ai obtenu de cette manière, les lentilles étant comptées à partir de l'œil:

	1e lentille.	2e lentille.	3e lentille.	4e lentille.
	38,89 } 38,87	50,74 } 50,705	50,60 } 50,57	41,82 } 41,77
	38,85	50,67	50,54	41,72
	38,91 } 38,85	50,63 } 50,59	50,71 } 50,735	41,75 } 41,765
	38,79	50,55	50,76	41,78
moyenne:	38,86	50,65	50,65	41,77

Les exemples rapportés suffisent pour montrer l'excellence de l'appareil et de la méthode. Les lectures se font jusqu'aux dixièmes de millimètre, et on voit qu'en répétant quelques fois la détermination des distances focales, on peut les obtenir exactes dans cette même limite. Une borne naturelle est mise à l'exactitude tant par la dispersion des couleurs que par l'aberration de sphéricité des lentilles, qui fait que les bords de celles-ci ont une plus courte distance focale que le centre; si l'on essaie de parer à cet inconvénient en plaçant devant la lentille un écran percé d'une ouverture ronde, qui ne laisse libre que le milieu de la lentille, le cône lumineux devient si aigu, que la même incertitude subsiste quant au placement de la lentille dans la position où les images des deux cheveux se superposent.

Lorsqu'il s'agit de la distance focale équivalente d'un système de lentilles, par exemple, d'un oculaire ou d'un objectif de microscope, il est toujours plus ou moins gênant de devoir, pour appliquer la méthode précédente, déterminer la distance des points principaux du système. Si celui-ci se laisse démonter, de manière qu'on puisse mesurer les courbures, épaisseurs et distances focales des diverses lentilles, ainsi que la distance qui les sépare, la difficulté en question n'est pas insurmontable; mais quand le système, comme certains objectifs de microscope, ne se prête pas au démontage, la méthode ne peut donner que des résultats approchés. Mais alors il est possible, à l'aide de notre appareil, d'appliquer avec beaucoup de succès la méthode ima-

ginée par M. MacGillavry et décrite dans le *Maandblad voor Natuurwetenschappen*, 5e année, n°. 5 (3 avril 1875). Dans cette méthode, on mesure le grossissement (ou la réduction) qu'un objet éprouve par la lentille à deux distances différentes; quand ces deux grossissements diffèrent, il y a différence aussi

dans la distance de l'objet à la lentille,
dans la distance de la lentille à l'image,
et dans la distance de l'objet à l'image.

Or, M. MacGillavry a montré qu'il suffit de mesurer, outre les grossissements, la variation d'une seule des trois distances dont il vient d'être question, pour qu'on puisse calculer la distance focale, sans avoir besoin de connaître ni la situation des points principaux, ni leur distance. La démonstration des formules qui servent à ce calcul est facile à trouver et a été donnée dans la communication susdite de M. MacGillavry.

Ces formules sont les suivantes:

Appelons a la distance de l'objet au point principal antérieur,
x la distance des points principaux,
b la distance du second point principal à l'image,
γ le grossissement,

et donnons, pour une seconde position, des accents à ces lettres;

la distance de l'objet à l'image est alors $a + x + b$,
et dans la seconde position $a' + x + b'$;

l'accroissement de la distance est donc $a' - a + b' - b$, indépendant de x.

En représentant maintenant $a - a'$ par k,
$b - b'$ „ l,
$a' - a + b' - b$ „ h,

d'où résulte $h = l - k$, on a les trois formules suivantes:

$$f = \frac{h\gamma'\gamma}{(\gamma' - \gamma)(\gamma'\gamma - 1)} = \frac{k\gamma'\gamma}{\gamma' - \gamma} = \frac{l}{\gamma' - \gamma}.$$

M. MacGillavry remarque que, lorsque γ et γ' sont > 1 et que $\gamma\gamma'$ est grand, la première et la troisième méthode sont les meilleures, tandis que la seconde est préférable dans le cas de

$\gamma\gamma' > 1$ mais < 2. Il donne aussi les formules pour les distances a et b, de sorte que, quand on a déterminé la distance de l'objet à la face antérieure du système de lentilles et celle de l'image à la face postérieure, la situation des points principaux devient connue.

Pour rendre mon appareil propre à l'application de cette méthode, j'ai fait faire chez M. Dumoulin, à Paris, deux échelles sur verre divisées en demi-millimètres; l'une se met en e et est par conséquent vue directement par l'oculaire de Ramsden, l'autre se place en r et est grossie par la lentille p, de sorte que le grossissement peut être observé sans peine. Pour le cas où l'on veut prendre celui-ci très grand, j'ai encore fait construire par le même artiste une division en dixièmes de millimètre, qui doit alors être placée en r; mais les traits de cette division sont si fins, que l'image en est peu visible avec l'éclairage présentement employé pour l'appareil.

Après avoir fait l'essai de cette méthode sur différentes lentilles, je suis disposé à croire qu'il conviendra toujours de combiner un grossissement aussi grand que possible avec un grossissement aussi petit que possible; on pourrait tout aussi bien associer une réduction aussi forte que possible avec une réduction aussi faible que possible, si la finesse des divisions n'excluait pas l'emploi des réductions, au moins de celles qui sont un peu notables. Comme en outre la grandeur h, distance de l'objet à l'image, varie le plus, c'est-à-dire plus que k ou l, j'ai d'abord appliqué la première méthode et fait usage de la formule

$$f = \frac{h\gamma'\gamma}{(\gamma' - \gamma)(\gamma'\gamma - 1)}.$$

En cas de grossissement on a $\gamma > 1$, en cas de réduction $\gamma < 1$; il ne faut donc pas combiner un grossissement avec une réduction, puisque $\gamma'\gamma$ deviendrait alors trop voisin de l'unité, et par conséquent $\gamma'\gamma - 1$ trop petit; si le grossissement et la réduction étaient exactement égaux, c'est-à-dire pour $\gamma' = \frac{1}{\gamma}$, on

obtiendrait même, à la fois, $\gamma'\gamma - 1 = 0$ et $h = 0$, et par conséquent

$$f = \frac{0}{0};$$

la lentille prend alors, pour une même distance de l'objet à l'image, tout juste les deux positions dont il est fait usage dans la méthode de Bessel.

Si au contraire on prend, par exemple, $\gamma = 7$ et $\gamma' = 1$, on obtient $f = \frac{7}{36} h$, et par conséquent une détermination très favorable.

J'ai déterminé itérativement, d'après chacune des deux méthodes, les distances focales de différentes lentilles; la conclusion à laquelle je suis arrivé, c'est que, pour des lentilles dont la distance focale n'est pas trop petite, pas au-dessous de 20 mm. par exemple, et à condition qu'on détermine la situation des points principaux, la méthode de Bessel est plus exacte, attendu que dans la méthode de M. MacGillavry il est toujours difficile d'évaluer le grossissement avec un haut degré de précision; c'est tout au plus si on peut l'estimer à un dixième d'unité près. Par contre, cette dernière méthode a le grand avantage de ne pas exiger la détermination de la distance des points principaux, et, en conséquence, de conduire beaucoup plus rapidement au but; en outre, pour les lentilles à distance focale très courte, par exemple < 10 mm. (objectifs de microscopes), elle mérite incontestablement la préférence.

La question se présente encore de savoir si, dans l'emploi de la méthode de Bessel, on ne pourrait pas, au moyen de la combinaison de plusieurs déterminations de E et de l, introduire aussi, comme seconde inconnue, la distance $\varkappa$ des points principaux. Peut-être, en effet, en faisant un certain nombre de déterminations pour des valeurs différentes de E, obtiendrait-on par la méthode des moindres carrés une valeur assez exacte de $\varkappa$, et, pourrait-on éviter ainsi le calcul de cette distance d'après la mesure des courbures, des distances focales et des distances mutuelles

des lentilles. Des essais m'ont appris, toutefois, que cette méthode est d'une application difficile et ne fournit pas une détermination exacte de $\varkappa$, ce qui tient à ce que les deux inconnues sont toujours affectées, dans les équations, de facteurs ayant le même signe.

Pour finir, je rapporterai quelques exemples de résultats obtenus par chacune des deux méthodes.

N°. 1. Oculaire de Ramsden, appartenant au micromètre filaire de la lunette de six pieds, de Fraunhofer, que possède l'observatoire d'Utrecht.

L'application de la méthode de M. MacGillavry a donné:

(1)	$\gamma = 9$	échelle 223,6
(2)	4,5	141,6
(3)	2,6	108,7
(4)	2,0	99,2
(5)	1,0	90,0

d'où, par combinaison de

(1) avec (3),	$f = 18{,}75$
(1) „ (4),	18,82
(1) „ (5),	18,77
(2) „ (5),	18,95.

La moyenne de ces 4 déterminations est 18,82. La valeur la plus probable ne peut naturellement être obtenue que par des calculs compliqués, pour lesquels il faut nécessairement connaître l'incertitude des valeurs de γ.

Pour l'application de la méthode de Bessel, j'avais mesuré

1e lentille	$f = 27{,}0$,	épaisseur 1,00 mm.
2e „	35,0,	3,00 „

la distance des faces des deux verres tournées l'une vers l'autre était de 11,5 mm. A l'aide de ces nombres, on trouve pour l'oculaire entier:

$$\varkappa = -1{,}3$$
$$f = 18{,}72,$$

tandis que par la méthode de Bessel, en prenant $\varkappa = -1{,}3$, j'ai obtenu:

E	b	f
118,8	73,05	18,93
110,0	63,35	18,81
100,0	51,05	18,89
90,0	38,1	18,85
80,0	22,8	18,73
74,9	10,1	18,71
	Moyenne . . .	18,82

valeur qui, dans le cas actuel, concorde très bien avec celle trouvée ci-dessus.

N°. 2. Objectif d'un microscope de Wegener, de Berlin, servant à un instrument universel.

La méthode de M. MacGillavry a fourni les résultats suivants:

N°.	Lecture de l'échelle.	γ
1	381,4	10,4
2	362,9	9,45
3	330,0	8,7
4	300	7,7
5	270	6,7
6	240	5,6
7	210	4,5
8	180	3,4
9	150	2,25
10	140	1,775
11	135	1,475
12	134	1,4
13	133	1,3305
14	132	1,19
15	131	1,111
16	130	1,0

d'où l'on déduit pour le grossissement :

par N°. 1 et 9	$f =$	29,66
„ „ 2 „ 10		29,50
„ „ 3 „ 11		29,27
„ „ 4 „ 12		29,04
„ „ 5 „ 13		28,73
„ „ 6 „ 14		28,81
„ „ 7 „ 15		29,07
„ „ 8 „ 16		29,52.

Ces résultats diffèrent plus entre eux que les précédents, mais aussi f est maintenant plus grand. La recherche de la valeur la plus probable qui se déduit de toutes les déterminations devient extrêmement laborieuse ; il en est de même du calcul des poids des différentes déterminations de f obtenues ci-dessus. Si, pour simplifier, nous supposons ces poids égaux entre eux, la moyenne arithmétique de toutes les déterminations donne $f = 29,20$ mm.

L'objectif de microscope se composait de deux lentilles achromatiques et pouvait être démonté. Pour la lentille antérieure, on obtint par la méthode de Bessel, en prenant, conformément au résultat des mesures et du calcul, $\varkappa = 0,85$:

E	b	f
260	101,9	54,77
240	70,2	54,64
	Moyenne . . .	54,70

pour la lentille postérieure, avec la valeur $\varkappa = 0,60$:

240	42,0	58,01
235	23,3	58,02
	Moyenne . . .	58,015.

Chacune de ces deux lentilles achromatiques était formée d'une lentille plan-concave de flint et d'une lentille équiconvexe de crown. Les épaisseurs, mesurées au sphéromètre, étaient :

pour la première lentille achromatique	2,26 mm.
„ „ seconde „ „	1,61 „
intervalle des deux lentilles	3,13 „

Un examen antérieur de lentilles achromatiques analogues, du même constructeur, m'avait appris que les deux points principaux d'une pareille lentille sont situés, à partir de la face plane antérieure:

1er point principal à 0,70 de l'épaisseur,
2e „ „ „ 1,075 „ „

par conséquent, à 0,075 en avant (c'est-à-dire en dehors) de la face convexe.

On déduit de là: distance du second point principal de la première lentille au premier point principal de la seconde lentille, = 4,1 mm.;

distance des points principaux du système entier:

$$x = 0{,}85 + 0{,}60 - \frac{4{,}1^2}{54{,}7 + 58{,}0 - 4{,}1} = 1{,}45 - 0{,}155 + 1{,}3;$$

distance focale du système entier:

$$f = \frac{54{,}7 + 58{,}0}{54{,}7 + 58{,}0 - 4{,}1} = 29{,}21,$$

valeur très rapprochée de la détermination précédente.

Appliquée à l'objectif complet, la méthode de Bessel donna, la distance x étant prise = 1,3, les valeurs suivantes:

E	b	f
160	80,2	29,54
155	74,0	29,52
150	67,4	29,54
145	60,5	29,56
140	54,3	29,56
135	45,3	29,59
130	37,2	29,49
125	26,9	29,46
120	8,5	29,52
	Moyenne . . .	29,53

Pour obtenir, au lieu de 29,53, la valeur 29,20, on devrait avoir, au lieu de $x = 1{,}3$, $x = 2{,}35$; mais cela n'est guère possible.

On voit que l'accord des résultats partiels ne laisse rien à désirer, et qu'il importe donc surtout de déterminer x avec précision, pour atteindre une exactitude proportionnée dans la détermination du grossissement.

Parmi les résultats obtenus par la méthode de M. MacGillavry, il y en a trois, le 1er, le 2e et le dernier, qui ne s'écartent pas beaucoup du résultat de la méthode de Bessel; si les autres s'en éloignent davantage, il faut sans doute l'attribuer à la difficulté de la détermination des grossissements, qui a peut-être fait commettre une erreur constante.

UTRECHT, 26 avril 1877.

Postérieurement aux recherches dont je viens de rendre compte, j'ai employé plusieurs fois la troisième méthode de M. MacGillavry, qui a sur la seconde deux avantages. D'abord, le calcul suivant la formule

$$f = \frac{l}{\gamma' - \gamma},$$

est plus simple que celui suivant la formule $\frac{h\gamma'\gamma}{(\gamma' - \gamma)(\gamma'\gamma - 1)}$; puis, ce qui est plus important, on peut multiplier autant qu'on le veut les lectures du vernier et les déterminations du grossissement correspondant, et obtenir ainsi une série d'équations linéaires susceptibles d'être résolues par la méthode des moindres carrés. L'équation ci-dessus peut, en effet, être écrite sous la forme

$$(\gamma' - \gamma) f = L' - L,$$

où L et L' désignent les lectures du vernier I relatives aux grossissements γ et γ'. De cette équation on déduit immédiatement:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma' f = L' + C \\ \gamma f = L + C\end{array}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{array}{l}\gamma' f - C = L' \\ \gamma f - C = L, \text{ etc.}\end{array}\right.$$

Autant on a fait de déterminations, autant on aura donc d'équa-

tions aux deux inconnues f et C, qui seront très faciles à résoudre par la méthode des moindres carrés. Il est toutefois préférable de donner aux équations la forme

$$x + Ly = \gamma,$$

en posant $x = \frac{C}{f}$ et $y = \frac{1}{f}$; il devient possible alors de chercher d'abord une solution approchée, en attribuant un même poids à tous les γ', et de tenir ensuite compte des différences qu'on aura pu constater. Mais cette extrême exactitude ne sera presque jamais nécessaire.

Comme exemple de l'application de cette méthode, je communiquerai la détermination de la distance focale d'une lentille relativement très épaisse, une loupe cylindrique (p, fig. 1). Cette lentille consistait en un cylindre de verre de 14 mm. de hauteur et $15^{mm},6$ d'épaisseur, dont les deux bases portaient encore un segment sphérique, de sorte que dans le sens de l'axe l'épaisseur de la lentille s'élevait à $19^{mm},67$.

Cette lentille fut placée de manière que son axe se trouvât aussi exactement que possible dans la direction de la règle divisée a, puis on exécuta les observations rapportées ci-dessous. On nota les indications des deux verniers. Le vernier I servait à déterminer d'après la troisième formule de M. MacGillavry la distance focale, le vernier II à trouver ensuite la distance des points nodaux; celui-ci donnait en effet, après application de la correction d'index, la distance de l'objet à l'image; mais des équations

$$\frac{a}{b} = \gamma \text{ et } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

on déduit:

$$a = (\gamma + 1) f,$$

$$b = \frac{\gamma + 1}{\gamma} f,$$

$$a + b = \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} f,$$

de sorte que, en représentant par Π l'indication du vernier Π, on avait:

$$x = \Pi - (a + b),$$
$$= \Pi - \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} f.$$

Voici maintenant le résultat de ces mesures:

L	γ	E Calcul — observation	$\frac{(\gamma+1)^2}{\gamma} f$	Π	x
280	17,0	+ 0,04	316,3	318,35	2,05
270	16,45	— 0,02	307,1	308,6	1,5
260	15,9	— 0,07	298,07	298,83	0,8
250	15,15	+ 0,08	285,70	288,87	3,2
240	14,7	— 0,07	278,25	278,8	0,6
230	14,0	+ 0,03	266,7	269,8	3,1
220	13,4	+ 0,02	257,4	259,8	2,4
210	12,8	+ 0,02	246,9	249,8	2,9
200	12,15	+ 0,07	236,2	239,45	3,25
190	11,7	— 0,08	228,7	229,45	0,75
180	11,0	+ 0,02	217,2	219,0	1,85
170	10,4	+ 0,01	207,3	209,2	1,9
160	9,85	— 0,04	198,3	199,3	1,0
150	9,2	0,00	187,6	189,4	1,8
140	8,6	0,00	177,8	179,5	1,7
130	8,0	0,00	168,0	169,6	1,6
120	7,4	0,00	158,2	159,75	1,55
110	6,8	— 0,01	148,5	149,9	1,4
100	6,2	— 0,01	138,7	140,2	1,5
90	5,6	— 0,01	129,0	130,55	1,55
80	5,0	— 0,01	119,5	121,0	1,5
70	4,37	+ 0,01	109,5	111,5	2,0
60	3,8	— 0,02	100,6	102,0	1,4
50	3,2	— 0,02	91,46	92,65	1,19
40	2,55	+ 0,02	82,0	83,75	1,75
30	1,98	— 0,01	74,4	75,65	1,25
20	1,32	+ 0,05	67,7	69,25	1,55
15	1,07	0,00	66,45	67,5	1,05
14	1,00	+ 0,01	66,36	67,9	1,54
				Moyenne	1,71.

La méthode des moindres carrés, appliquée aux équations obtenues, donna:

$$29\,x + 4079\,y = 25059,$$
$$4079\,x + 771721\,y = 47179{,}75,$$

d'où:

$$x = 0{,}163,$$
$$y = 0{,}060276,$$

et par conséquent:

$$f = 16{,}59.$$

L'erreur moyenne de chaque détermination de γ fut trouvée, au moyen des valeurs de E, $= \pm\ 0{,}037$, et par conséquent l'erreur probable de y:

$$0{,}6745 \times \pm \frac{0{,}037}{\sqrt{197996}} = \pm\ 0{,}0000567;$$

or, on a

$$\partial f = -f^2\,\partial y,$$

et par suite

erreur probable de $f = \pm\ 0{,}02$ mm.

Pour une lentille biconvexe, en général, on a:

$$f = \frac{n}{n-1}\,\frac{rr'}{n(r'-r)+(n-1)\,d},$$

donc, si $r' = -r$,

$$f = \frac{n}{n-1}\,\frac{r^2}{2\,nr-(n-1)\,d},$$

par conséquent, lorsque d, r, r' et f sont connus,

$$(r'-r+d)\,n^2 - \left(\frac{r\,r'}{f} - r + r' + 2\,d\right) n + d = 0,$$

ou, si $r' = -r$,

$$(2r-d)\,n^2 - \left[\frac{r^2}{f} + 2\,(r-d)\right] n - d = 0.$$

Dans le cas actuel, on a:

$r = -r' = 12{,}125$, $d = 19{,}67$, $f = 16{,}59$, par conséquent:

$$4{,}58\,n^2 + 6{,}2284\,n - 19{,}67 = 0,$$

d'où

$$n = 1{,}501 \qquad \text{ou} \qquad -2{,}861,$$

racines dont la première est celle que nous cherchons. En substituant maintenant les valeurs de r, f et d dans les formules (3), on trouve :

$$\varkappa = 6{,}566 - \frac{6{,}566^2}{0{,}501 \times 17{,}684}$$
$$= 6{,}566 - 4{,}865 = 1{,}70,$$

d'où ressort un accord parfait avec la valeur trouvée tout à l'heure.

Par l'application de la méthode de Bessel j'obtins, en prenant $\varkappa = 1{,}70$,

E	e		f
110,0	67,65 67,30	67,48	16,56
100,0	55,9 55,8	55,85	16,65
90,0	44,3 44,35	44,325	16,51
80,0	30,7 30,9	30,8	16,55
70,0	12,7 12,6	12,65	16,49
		Moyenne . . .	16,55

ce qui donne une différence de 0,04 avec la valeur trouvée par la méthode de M. MacGillavry, différence qui tombe entre les limites des erreurs d'observation.

Note additionnelle. Lorsque, en avril 1877, je présentai mon appareil à l'Académie royale des sciences et communiquai quelques-uns des résultats obtenus, M. Bosscha fit également connaître une méthode imaginée par lui et qui a beaucoup d'analogie

avec celle dont M. Cornu a donné la description dans les numéros de septembre et d'octobre (1877) du *Journal de physique*. Cette méthode part d'une autre formule fondamentale, mais exige un appareil semblable à celui que j'ai décrit plus haut, sauf que M. Cornu emploie un microscope au lieu d'un oculaire de Ramsden. Il pointe exactement 1° sur l'image d'un objet éloigné, 2° sur la face postérieure du système de lentilles (au moyen d'un grain de poussière ou d'une petite tache faite intentionnellement), 3° sur l'image d'une tache pareille faite à la face antérieure; il retourne ensuite le système de lentilles, et répète les mêmes mises au point, en notant chaque fois la position du vernier. Une formule simple donne alors la distance focale équivalente du système.

Variis modis bene fit; cet adage trouve sans doute ici son application. Quant à savoir dans quels cas la méthode de M. Cornu mérite la préférence sur celles de Bessel ou de M. Mac Gillavry, c'est ce qu'un examen ultérieur devra apprendre.

UTRECHT, 28 décembre 1877.

SUR UNE

SYNTHÈSE D'ÉTHERS ÉTHYLIQUES BROMÉS,

PAR

Fr. KESSEL.

(*Travail fait au laboratoire de l'université de Leyde*).

Notre connaissance des produits de substitution halogénés de l'éther éthylique s'étend, comme on le sait, sur un certain nombre d'éthers chlorés, ainsi que sur un corps $C_4 Cl_6 Br_4 O$, nommé chlorbromoxéthose. Des produits de substitution bromés n'avaient été obtenus jusqu'ici, ni par l'introduction directe du brome dans l'éther éthylique, ni, que je sache, par une autre voie. J'ai réussi, comme on le verra, à isoler deux de ces corps, un éther éthylique tétrabromé et un éther octobromé, et à recueillir des preuves de l'existence de l'éther perbromé.

M. Löwig [1]) a fait réagir le brome sur l'éther éthylique à la température ordinaire. Les produits principaux qu'il a obtenus consistaient en bromal et en un corps qu'il appelle brométher lourd. Ce dernier avait les propriétés suivantes: il était facile à volatiliser et plus dense que l'acide sulfurique; bouilli avec l'acide sulfurique, il se décomposait, en abandonnant du brome et en donnant lieu à la formation d'un liquide incolore (?). La potasse, en solution aqueuse bouillante, le décomposait avec production

---

[1]) Pogg. *Annal.*, t. XXXVI, p. 557.

de bromoforme, de formiate de potasse et de bromure de potassium. M. Löwig ne se prononce pas sur la question de savoir si ce brométher lourd est un corps particulier ou bien un mélange de plusieurs corps différents. Comme produits accessoires de la réaction du brome sur l'éther éthylique, M. Löwig a encore obtenu l'acide bromhydrique, l'acide formique et l'éther bromhydrique. Il est possible, à en juger d'après ce qui sera exposé plus loin, que le susdit „brométher lourd" ait consisté en partie en éther octobromé.

Partant de l'oxychloride d'éthylidène $\underbrace{\begin{matrix} CH_3 & & CH_3 \\ | & & | \\ C<^{H}_{Cl} & & C<^{H}_{Cl} \end{matrix}}_{O}$, le produit de la réaction du gaz chlorhydrique sur l'aldéhyde à basse température, je me proposai de remplacer d'abord tous les atomes d'hydrogène par du brome, d'arriver ainsi à un octobromdichloréther, analogue au chlorbromoxéthose [1]) et de constitution connue, puis d'étudier la manière dont ce corps se comporte sous l'influence de la chaleur.

Les résultats obtenus furent, toutefois, entièrement différents de ceux que j'attendais.

Lorsqu'on traite l'oxychloride d'éthylidène à la température ordinaire par le brome, il n'en absorbe qu'un très petit nombre de gouttes, en s'échauffant légèrement et en dégageant des gaz qui fument à l'air (Cl H, Br H?). Si l'on procède, au contraire, en ajoutant d'oxychloride l'éthylidène à un excès de brome, il se produit une réaction assez vive, qui toutefois, lorsque le mélange est abandonné à lui-même, devient plus faible et au bout de peu temps cesse complétement.

L'oxychloride d'éthylidène et le brome, pris dans les proportions

$$C_4 H_8 Cl_2 O + 16 Br,$$

[1]) *Ann. de chim. et de phys.* [3], t. XVI, p. 5. — *Ann. der Chemie*, t. LVI, p. 268.

furent ensuite mélangés à une température convenablement abaissée, puis introduits dans des tubes de verre, qu'on scella à la lampe, après que le dégagement de gaz eut cessé. Les tubes furent d'abord chauffés au bain-marie pendant 10 heures, puis dans un bain d'air, chaque fois pendant 10 heures, de 100° à 150°, à 190° et finalement à 210°, jusqu'à production d'un commencement de carbonisation. Après chaque chauffe de 10 heures, les tubes étaient ouverts pour laisser échapper le gaz, qui d'abord consistait en acide chlorhydrique et acide bromhydrique, mais, après l'échauffement à 150°, seulement en acide bromhydrique.

Le produit de la réaction formait un liquide huileux, fortement coloré par du brome libre, et fumant à l'air. Un essai ayant pour but d'en isoler, au moyen de fractionnements prolongés, des corps à point d'ébullition constant, ne conduisit à aucun résultat. Sous l'influence de distillations répétées, le liquide se décomposait, en dégageant d'abondantes vapeurs d'acide bromhydrique et en laissant une grande quantité de résidu charbonneux, fortement chargé de brome. Il s'agissait donc de chercher une autre méthode pour séparer les corps différents qui pouvaient exister dans le liquide; je la trouvai en opérant de la manière suivante.

Le contenu des tubes, placé dans une cornue où il était traversé par un courant continu de CO^2, fut d'abord chauffé au bain-marie jusqu'à ce qu'il ne se dégageât plus ni brome ni acide bromhydrique; ensuite, encore quelque temps au bain d'huile, à 130°, pour chasser l'oxychloride d'éthylidène inaltéré qui aurait pu s'y trouver. Il ne passa ainsi que quelques gouttes d'un liquide qui fumait fortement à l'air et qui, au contact de l'eau, ne se décomposait que lentement en acide bromhydrique et en corps aldéhydiques. Le contenu de la cornue, toujours traversé par un courant d'acide carbonique et dans lequel plongeait un thermomètre, se laissa alors séparer approximativement, par une seule distillation, en 3 parties. Il convient d'éviter les distillations répétées, à cause de la décomposition à laquelle elles don-

nent lieu. C'est de 190° à 240° que le thermomètre monta avec le plus de lenteur; à partir de ce dernier point, il s'éleva de nouveau rapidement jusqu'à 280°. Au-delà, il ne passa plus rien. Dans la cornue restait une quantité notable d'une masse poisseuse, fortement bromée.

Les trois fractions du produit (130°—190°, 190°—240°, 240°—280°) ayant été refroidies pendant 2 à 3 heures dans un mélange de glace et de sel marin, la fraction 190°—240° se solidifia presque entièrement en une masse cristalline formée de lamelles nacrées, tandis que les deux autres fractions ne montraient aucune trace de cristallisation, même après 16 heures de séjour dans le mélange réfrigérant. Il m'a coûté beaucoup de peine et de temps pour séparer les cristaux de l'eau-mère qui les mouillait, attendu qu'à la température ordinaire d'appartement ils sont si solubles dans l'eau-mère, que toute la masse cristalline se liquéfie en quelques minutes lorsqu'elle est extraite du mélange frigorifique. Au prix de grandes pertes de matière, et après maints tâtonnements, je suis pourtant parvenu à me rendre maître de la substance cristalline, et cela en jetant la bouillie de cristaux sur des plaques de terre cuite poreuse, refroidies à 0°, où la masse était abandonnée à elle-même. Il restait alors de petites quantités de cristaux qui, une fois débarrassés complétement de l'eau-mère, ne tombaient plus en déliquescence à la température ordinaire. Soumis à une nouvelle cristallisation dans l'éther additionné de quelques gouttes d'alcool, ils constituaient des écailles nacrées, à contours effacés. Ils fondaient juste à 52°, et distillaient sans décomposition à 220° (thermomètre plongé aux ¾ dans la vapeur). La matière volatilisée se solidifiait déjà dans le tube réfrigérant, en une masse blanche cristalline, dont le point de fusion était resté constant, à 52°.

Pour trancher la question de savoir si ces cristaux, outre le brome, contenaient aussi du chlore (l'analyse élémentaire y avait démontré la présence de l'hydrogène), j'en broyai une petite quantité avec $Cr_2 O_7 K_2$, et chauffai le mélange dans une petite cornue distillatoire avec de l'acide sulfurique concentré. L'eau

dans laquelle les produits avaient été reçus contenait beaucoup de brome, mais pas une trace de chrome provenant de la décomposition de CrO_2Cl_2. La substance ne devait donc pas renfermer de chlore.

1gr.,0983 du haloïde argentique fondu, obtenu en faisant digérer la substance à 180° avec NO_3H et $AgNO_3$, donnèrent, étant traités par le chlore jusqu'à ce que le poids restât constant,

0gr.,8218 de Ag Cl.

D'après cela, la quantité de bromure d'argent contenu dans le haloïde argentique est de:

$$\frac{(1{,}0983 - 0{,}8218)\,188}{44{,}5} = \frac{0{,}2765.\ 188}{44{,}5} = 1^{gr.}{,}168\ AgBr,$$

chiffre qui prouve suffisamment que le haloïde argentique ne renfermait que du bromure d'argent, et que par conséquent il n'y avait pas de chlore dans la substance en question. La détermination directe du brome conduisit au résultat suivant:

0gr,3958 de la substance fournirent 0gr.,8603 Ag Br = 0gr.,3660 Br. = 92,47 pCt. Br.

La combustion par CrO_4Pb donna

I { pour 0,6007 de la substance:
0,157 CO_2 = 0,042 C = 7,12 pCt. C.
0,036 H_2O = 0,004 H = 0,66 „ H.

II { pour 0,7011 de la substance:
0,1799 CO_2 = 0,049 C = 6,98 „ C.
0,0382 H_2O = 0,0042 H = 0,599 „ H.

La composition de la matière est, par suite,

		calc. pour $C_2H_2Br_4$;		calc. pour $C_4H_2Br_8$.
C =	7,00	— 6,93	—	6,95
H =	0,65	— 0,57	—	0,28
Br =	92,47	— 92,48	—	92,75
	100,18.			

Elle corres ond donc à un corps soit de la formule $C_2 H_2 Br_4$ ou $C_4 H_2 Br_8$, soit d'une formule multiple de celles-là.

Le point de fusion et le point d'ébullition de la matière, comparés aux données qu'on trouve dans les livres, ainsi que sa dérivation de l'oxychloride d'éthylidène, nous autorisent à la regarder comme un tétrabrométhane, à savoir, comme le tétrabrométhane asymétrique

$$\begin{array}{l} C\,Br_3 \\ | \\ C\,H_2\,Br, \end{array}$$

isomère du tétrabromure d'acétylène.

Les tentatives de détermination de la densité de vapeur par la méthode de Hofmann échouèrent, par suite de la circonstance qu'à la température où a lieu la volatilisation complète les gaz se dissocient, probablement en:

$$\underbrace{C_2\,H\,Br_3}_{\text{tribrométhylène}} + \underbrace{H\,Br}_{\text{acide bromhydrique.}}$$

Après le refroidissement de l'appareil, on trouva dans le vide barométrique un sublimé de cristaux brillants, qui présentaient le point de fusion de la substance primitive, 52°. Ni dans le vide barométrique, ni dans le mercure, on ne put constater la présence de l'acide bromhydrique. Il faut admettre que pendant le refroidissement les produits de la dissociation s'étaient recombinés pour former la substance primitive.

Des déterminations répétées dans la vapeur d'essence de térébenthine (160°), où avait lieu une gazéification presque complète, donnèrent pour chiffre moyen de la densité:

160,0 (rapporté à l'hydrogène);

dans la vapeur d'aniline (187°), on obtint le chiffre moyen très différent:

110,0.

La densité théorique de la vapeur est de

173,0 pour $C_2 H_2 Br_4$,

pour un corps de la formule $C_4 H_2$, Br_8, au contraire,

345,3.

Le nombre trouvé 110,0 correspond approximativement à un mélange de

$$C_2 H Br_3 + H Br + C_2 H_2 Br_4 \text{ (calculé : 115,0.)}$$

Comme je suis maintenant en mesure, grâce à un procédé plus simple, de retirer du produit brut une plus forte proportion du corps, je m'occuperai d'étudier spécialement les phénomènes de dissociation dont il vient d'être parlé, aussitôt que je me retrouverai en possession d'une quantité de matière suffisante.

Ainsi qu'il a été dit plus haut, la fraction du produit brut, obtenue à la température la plus basse, ne se solidifie pas dans le mélange réfrigérant. Par un fractionnement répété sous pression réduite (450 à 470 millim. de mercure), on parvient à en isoler un liquide passant à une température constante, entre 132° et 135°. Il ne peut être amené à l'état solide dans le mélange frigorifique. Les parties qui distillent au-dessous de 132° ressemblent, en général, au produit obtenu par l'action du brome sur l'oxychloride d'éthylidène en vase ouvert, à 120° (voir plus loin). Des parties à point d'ébullition plus élevé on peut encore isoler de petites quantités de tétrabrométhane.

Le corps qui, dans les conditions indiquées, passe régulièrement entre 132°—135, forme un liquide oléagineux, ne fumant presque pas à l'air, doué d'une odeur analogue à celle de la sueur. Versé dans l'eau froide, il tombe au fond, et ne s'y décompose d'une manière appréciable qu'après un contact de plusieurs heures. (La liqueur aqueuse renferme alors de l'acide bromhydrique et réduit la solution ammoniacale d'argent).

La décomposition marche plus rapidement quand le corps est légèrement chauffé avec l'eau. Lorsque, toutefois, on le fait bouillir longtemps avec l'eau, dans l'appareil à reflux, la liqueur, après le refroidissement, ne contient plus aucune trace d'une substance aldéhydique et ne renferme d'autre acide que l'acide bromhydrique. Au fond du vase on trouve alors un liquide très fluide, qui réfracte fortement la lumière, et qui possède une odeur rappelant celle du chloroforme.

Le corps qui bout entre 132°—135° ne contient pas de chlore. Qualitativement, ce fait a été établi par la méthode indiquée à propos du tétrabrométhane. Quantitativement, l'absence du chlore est prouvée par les nombres suivants:

1gr.,4818 du haloïde argentique fondu (obtenu comme précédemment) ont donné, après qu'on y eut fait passer du chlore jusqu'à ce que le poids restât constant, 1gr.,3986 Ag Cl; le haloïde renferme donc:

$$\frac{(1,8418-1,3986)\,188}{44,5} = \frac{0,443.\,188}{44,5} = 1,872 \text{ Ag Br.}$$

Il en résulte qu'on n'avait affaire qu'au bromure d'argent et que le chlore n'entrait pas dans la composition du corps.

Le dosage direct du brome, exécuté sur 0gr.,7091 de la substance, a donné:

$$1,5109 \text{ Ag Br} = 0,6428 \text{ Br} = 90,53 \text{ pCt. Br.}$$

Par la combustion avec CrO_4Pb on a obtenu:

I { de 1gr.,0228 de la substance:
0gr.,2611 CO_2 = 0gr.,0712 C = 6,96 pCt. C.
0gr.,0333 H_2O = 0gr.,0037 H = 0,36 „ H.

II { de 0gr.,8181 de la substance:
0gr.,2089 CO_2 = 0gr.,0569 C = 6,95 „ C.
0gr.,0266 H_2O = 0gr.,0029 H = 0,354 „ H.

En ayant égard à la formation du corps au moyen de l'oxychloride d'éthylidène ($CH_3 - CHCl - O - CHCl - CH_3$), on peut déduire des nombres trouvés la formule: $C_4H_2Br_8O$.

trouvé:		calc. pour $C_4H_2Br_8O$:
C = 6,95	—	6,80
H = 0,357	—	0,28
Br = 90,53	—	90,65
O = —	—	2,26
		99,99.

Le corps est par conséquent un éther éthylique octobromé,

auquel revient, par des raisons théoriques qui seront mentionnées plus loin, la constitution

$$\underbrace{\begin{array}{c} CBr_3 \\ | \\ CHBr \end{array} \qquad \begin{array}{c} CBr_3 \\ | \\ CHBr \end{array}}_{O.}$$

Le résultat énoncé plus haut, que la liqueur aqueuse obtenue dans la décomposition du corps ne renferme que de l'acide bromhydrique, est mis en évidence par les données suivantes:

La liqueur, distillée, se comporte tout à fait comme une solution aqueuse d'acide bromhydrique. Il passe d'abord de l'eau, ensuite le thermomètre s'élève lentement à 120° et reste finalement fixe entre 120—126°, jusqu'à ce que tout ait distillé.

Une portion du produit total de la distillation a été saturée par la soude, pour obtenir le sel sodique.

0gr.,3158 du sel sodique séché à 120° ont donné:
0gr.,2169 Na_2SO_4 = 0gr.,0702 Na = 22,23 pCt. Na.
Le bromure de sodium exige: 22,33 pCt. Na.

Le liqueur aqueuse ne contenait par conséquent que de l'acide bromhydrique.

La dernière portion du produit brut, celle qui avait passé à la température la plus élevée, et de laquelle ni à la pression ordinaire ni sous pression réduite on ne put isoler par un fractionnement ultérieur des corps à point d'ébullition constant, fut additionnée de quelques gouttes d'eau, puis abandonnée longtemps à elle-même. Au bout de quelques jours, il s'était formé dans la liqueur aqueuse des cristaux ayant l'aspect de prismes plats à faces terminales obliques. Ces cristaux se dissolvaient dans l'eau, en donnant un liquide fortement acide, qui n'était pas troublé par l'addition de $AgNO_3$. Mais lorsque ce liquide était bouilli avec la solution de nitrate d'argent, il se produisait immédiatement un abondant précipité de bromure d'argent. Les cristaux, inaltérables à l'air, se fondaient à 129°,5.

Dans un dosage du brome on obtint:

de $0^{gr.},342$ de la substance,

$0^{gr.}, 6479\ AgBr = 0^{gr.},2757\ Br = 80,61$ pCt. Br.

Le point de fusion, la teneur en brome et l'action du nitrate d'argent font immédiatement reconnaître cette substance pour l'acide tribromacétique. Celui-ci fond à 130° et contient 80,80 pCt. Br.

L'idée se présentait d'elle-même que l'acide tribromacétique devait naissance à la réaction de l'eau sur du bromure de tribromacétyle, qui pouvait exister dans la partie la moins volatile du produit brut, par suite de la décomposition d'éther perbromé dans les distillations successives. Cette hypothèse me paraît recevoir une confirmation de la circonstance que, plus on répète la distillation de cette partie du produit brut, plus la quantité d'acide tribromacétique augmente. Tandis que le liquide distillé une seule fois ne fournit que de faibles quantités d'acide tribromacétique et laisse encore, même après plusieurs jours de contact avec l'eau, une proportion considérable de substance inaltérée, une quantité égale du produit brut donne déjà, après 5 distillations, 2—3 fois plus d'acide tribromacétique et ne laisse qu'une petite quantité de substance non décomposée par l'eau.

On sait que l'éther perchloré se décompose par la chaleur de la manière suivante:

$$\underbrace{\begin{matrix} CCl_3 & CCl_3 \\ | & | \\ CCl_2 & CCl_2 \end{matrix}}_{O} = \underbrace{CCl_3 - CCl_3}_{\text{perchloréthane}} + \underbrace{CCl_3 - CClO}_{\text{chlorure de trichloracétyle.}}$$

Un éther perbromé devra naturellement subir une décomposition analogue. Le bromure de tribromacétyle, qui en résulte, donne alors avec l'eau de l'acide tribromacétique:

$$CBr_3 - CBrO + H_2O = CBr_3 - CO.OH + HBr.$$

Bien que je n'aie pas réussi à isoler l'éther perbromé lui-même, sa présence dans le produit de la réaction du brome sur l'oxychloride d'éthylidène ne saurait guère être révoquée en doute, eu

égard à la manière dont se comporte la portion de ce produit qui bout à la température la plus élevée.

J'ai essayé aussi, en faisant agir le brome en quantités moindres et à des températures plus basses sur l'oxychloride d'éthylidène, d'obtenir des éthers bromés ou chlorobromés inférieurs.

L'oxychloride d'éthylidène étant chauffé au bain-marie, dans un appareil muni du réfrigérant à reflux, on y ajouta peu à peu du brome dans la proportion de $C_4 H_8 Cl_2 O + 2 Br_2$. Avant de faire une nouvelle addition de brome, on attendait chaque fois que les quantités déjà introduites fussent complétement décomposées. Le brome est absorbé très facilement et donne lieu à un dégagement de vapeurs acides. Ces vapeurs consistent en un mélange d'acides bromhydrique et chlorhydrique. Le produit de la réaction est un liquide oléagineux, légèrement coloré par du brome libre, fumant fortement à l'air, et s'épaississant dans un mélange réfrigérant. Comme il ne se laissait purifier ni à la pression ordinaire, ni sous pression réduite, on le chauffa au bain-marie en présence d'un courant continu de CO_2, en élevant peu à peu la température jusqu'à 100° et la maintenant à ce point aussi longtemps (environ 2 heures) qu'il se dégageait encore du brome et de l'acide bromhydrique. Ainsi traité, le produit forme un liquide faiblement coloré en jaune, qui fume très peu à l'air. Il tombe au fond dans l'eau et s'y décompose par un contact prolongé.

L'absence complète du chlore est mise hors de doute, non-seulement par la manière dont la substance se comporte en présence de $Cr_2 O_7 K_2$ et $S O_4 H_2$, mais aussi par le dosage suivant du brome :

0gr.,8218 de la substance ont donné

1gr.,5348 de haloïde argentique, qui fournirent

1gr.,1592 $AgCl$; le haloïde renfermait par conséquent :

$$\frac{(1,5348 - 1,1592)\,188}{44,5} = \frac{0,3756.\,188}{44,5} = 1,586\ AgBr.$$

Il n'y avait donc pas de chlore dans la substance.

La quantité trouvée de $AgBr$ correspond à une proportion de 82,13 de brome pour cent de la substance primitive.

Une portion de matière, qui avait été traitée au bain-marie pendant 5 heures, fournit au dosage direct du brome: les valeurs suivantes:

$0^{gr.},7421$ de la substance donnèrent:

$1^{gr.},4196\ AgBr = 0^{gr.},604\ Br = 81,49$ pCt. Br.

La moyenne des deux déterminations est:

81,76 pCt. Br.

Si l'on admet que dans la réaction décrite il ne s'est formé qu'un seul produit de substitution bromée de l'éther éthylique, la quantité trouvée de brome conduit provisoirement, par le calcul, à la formule d'un éther tétrabromé.

$C_4H_6Br_4O$ demande 82,05 pCt. Br.
trouvé (moyenne) 81,76 „ „

L'analyse élémentaire du produit qui n'avait été traité que pendant 2 heures au bain-marie donna:

I { substance employée: $0^{gr.},8371$
0,3721 CO_2 = 0,1015 C = 12,12 pCt. C.
0,1480 H_2O = 0,0164 H = 1,96 „ H.

Le produit chauffé pendant 5 heures au bain-marie fournit les résultats suivants:

II { substance employée: $0^{gr.},9402$.
0,4431 CO_2 = 0,1208 C = 12,84 pCt. C.
0,1595 H_2O = 0,0177 H = 1,88 „ H.

Les chiffres du produit I présentent un accord satisfaisant avec les proportions calculées, tandis que le produit II renferme un peu trop de carbone, par suite d'une décomposition partielle, due à l'application trop prolongée de la chaleur. Ce produit avait pris une légère coloration brune.

		$C_4H_6Br_4O$ demande		trouvé I.		trouvé II.
C	=	12,31	—	12,12	—	12,84
H	=	1,54	—	1,96	—	1,88
Br	=	82,05	—	82,13	—	81,39
O	=	4,10	—			

Le corps est, d'après cela, un éther tétrabromé. Sa production, dans les conditions indiquées, se laisse exprimer par les équations suivantes:

$$(C_2 H_4 Cl)^2 O + 2 Br^2 = (C_2 H_3 Br Cl)^2 O + 2 Br H \text{ et}$$
$$(C_2 H_3 Br Cl)^2 O + 2 HBr = (C_2 H_3 Br Br)^2 O + 2 H Cl.$$

La substitition du brome au chlore, en conséquence de l'action de Br H sur les chlorures organiques, est un phénomène déjà plusieurs fois signalé dans la littérature chimique. Récemment [1]), M. E. Demole a obtenu l'acide monobromacétique en faisant réagir Br H sur l'acide monochloracétique.

Si l'on soumet à l'action du brome en excès, dans des vases ouverts, l'oxychloride d'éthylidène porté à des températures voisines de son point d'ébullition, on obtient un produit de tous points semblable au précédent. Un dosage du brome a donné:

substance employée : 0gr.,5524

1gr.,0689 Ag Br = 0gr.,4549 Br = 82,34 pCt. Br.

C'était donc encore le tétrabromure, et non un produit bromé supérieur.

Il ne saurait exister de doute quant à la position de deux des atomes de brome dans l'éther tétrabromé, puisqu'ils prennent la place des atomes de chlore qui se trouvaient dans la substance primitive. Le corps doit donc contenir certainement le résidu:

$$\overset{\|}{C}\,Br - O - \overset{\|}{C}\,Br.$$

De même, il est facile de prouver que dans ce résidu il doit encore y avoir 2 atomes d'hydrogène:

$$\overset{|}{C}\,H\,Br - O - \overset{|}{C}\,H\,Br.$$

Les deux autres atomes de brome se trouvent alors tous les deux dans l'un des résidus méthyliques, ou bien ils sont par-

[1]) *Ber. der deutsch. chem. Ges.*, t. IX, p. 560.

tagés entre ces deux résidus. On obtient ainsi pour la constitution du corps les expressions suivantes:

$$\begin{array}{l} CHBr_2 \\ | \\ CHBr - O - \end{array} \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CHBr \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} CH_2Br \\ | \\ CHBr - O - \end{array} \begin{array}{l} CH_2Br \\ | \\ CHBr. \end{array}$$

La suite fera voir que les probabilités les plus fortes sont en faveur de la seconde de ces deux formules.

On sait que l'oxychloride d'éthylidène se décompose avec l'eau en aldéhyde et acide chlorhydrique (Lieben (1)):

$$\begin{array}{l} CH_3 - C\begin{array}{l}/H \\ -Cl \\ \backslash O \end{array} \\ CH_3 - C\begin{array}{l}/O \\ -Cl \\ \backslash H \end{array} \end{array} + \begin{array}{l} H \\ H \end{array}\!\!> O = 2\,HCl + \frac{CH_3 - COH}{CH_3 - COH}.$$

Les dérivés de l'éther qui contiennent le résidu

$$\begin{array}{l} | \\ CBr_2 - O - \end{array} \begin{array}{l} | \\ CBr_2 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} | \\ CBrBr - O - \end{array} \begin{array}{l} | \\ CHBr \end{array}$$

devront présenter parmi les produits de leur décomposition un bromure acide, $C(X)_3 - COBr$ (expression où X signifie brome ou hydrogène), ou, en cas de décomposition plus avancée, l'acide correspondant lui-même:

$$C(X)_3 - COBr + H_2O = HBr = C(X)_3 - CO.OH.$$

Le tétrabromure, mélangé avec 20 fois son poids d'eau, fut chauffé à 50—55° dans l'appareil à reflux, jusqu'à ce qu'il se fût entièrement dissous, en laissant une masse résineuse brune. Le réfrigérant à reflux communiquait par son extrémité libre avec des appareils d'absorption, qui contenaient de l'eau ammoniacale et étaient refroidis par de la glace. La réaction achevée, le liquide aqueux fut séparé de la masse résineuse. De cette masse elle-même on ne put isoler aucun corps déterminé.

Le liquide aqueux possède l'odeur pénétrante, facile à reconnaître, de l'aldéhyde crotonique. Quand on le distille, le thermomètre monte lentement de 100 à 110°, s'élève ensuite rapidement à 120° et se maintient finalement entre 120—126°, jusqu'à ce que tout le liquide ait passé.

(1) *Ann. d. Chemie*, t. CVI, p. 336.

Une portion recueillie entre 102—110° présentait toutes les réactions propres à l'aldéhyde crotonique. Dans la masse entière du liquide aqueux il n'y avait, outre l'acide bromhydrique, aucun autre acide; c'est ce qui résulte, sans incertitude, du dosage du sodium et du brome dans le sel sodique qu'on avait obtenu par la neutralisation d'une partie du liquide aqueux distillé simplement, sans réserve de fractions déterminées.

$0^{gr.},2171$ du sel séché à 120° ont donné:

$0^{gr.},1514\ Na_2\ SO_4 = 0^{gr.}049\ Na = 22,57$ pCt. Na,

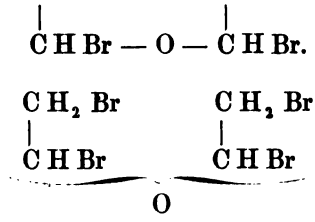
et $0^{gr.},1483$ du même sel ont donné:

$0^{gr.},2718\ AgBr = 0,1156\ Br = 77,95$ pCt. Br.

Le bromure de sodium contient: 22,33 pCt. Na et 77,67 pCt. Br.

L'absence complète de l'aldéhyde dans la liqueur absorbante (bien que, si ce corps avait pris naissance dans la décomposition, des traces au moins eussent dû en échapper à l'action de l'acide bromhydrique) tend à faire conclure qu'il n'y avait pas de groupes méthyliques inaltérés. Le manque total d'acide acétique et d'acides acétiques bromés met hors de doute que l'éther tétrabromé renferme le résidu:

L'expression



semble donc être la seule admissible pour la constitution de l'éther tétrabromé, et la formation de l'aldéhyde crotonique précède, en tout cas, celle de l'aldéhyde monobromée.

Une tentative ayant pour but de trouver dans l'action du zinc-éthyle de nouveaux arguments en faveur de la constitution indiquée, n'a conduit à aucun résultat. Une réaction s'opère, à la vérité: on obtient de grandes quantités de matières résineuses et, en proportion extrêmement faible, une huile à odeur de muscade, qui nage sur l'eau.

Le corps à odeur de chloroforme, qui apparaissait avec l'acide bromhydrique dans la décomposition de l'éther octobromé, était du bromoforme. Après avoir été séché sur l'acide sulfurique, il bouillait entre 148—154°, en abandonnant une partie de son brome. L'hydrate de potasse alcoolique le décomposait, à l'ébullition, en bromure de potassion et formiate de potasse.

Sa densité à 18° était de

$$\frac{1,5594}{0,5448} = 2,86.$$

Le dosage du brome donna, dans

0gr.,5509 de substance,

1gr.,2158 Ag Br = 0gr.,5173 Br = 93,61 pCt. Br.

Le bromoforme bout entre 150—152°, en perdant du brome, possède à 12° une densité de 2,9 et contient 94,85 pCt. Br. La différence du contenu en brome s'explique par la décomposition partielle que le corps éprouve quand on le distille.

Je n'ai pu décider encore de quelle manière le bromoforme prend naissance dans la décomposition de l'éther octobromé.

Ce dont je me suis parfaitement assuré, toutefois, c'est qu'il ne se trouve pas déjà tout formé dans le produit de la réaction du brome sur l'oxychloride d'éthylidène, mais qu'il n'apparaît que pendant l'ébullition de l'éther octobromé avec l'eau.

Quoi qu'il en soit, la circonstance que dans la décomposition en question il ne se produit aucun autre acide que l'acide bromhydrique, prouve que l'éther octobromé doit renfermer le résidu $\overset{|}{C}HBr - O - \overset{|}{C}HBr$. Les autres atomes de brome sont donc répartis sur les deux groupes méthyliques, et le corps possède en conséquence la constitution:

$$\begin{array}{ccccc} CBr_3 & & & & CBr_3 \\ | & & & & | \\ CHBr & - & O & - & CHBr. \end{array}$$

L'éther perbromé, dont la présence dans le produit de la réaction est décelée par la formation de l'acide tribromacétique, ne peut naturellement avoir que la constitution:

$$\begin{array}{ccc} CBr_3 & & CBr_3 \\ | & & | \\ CBr_3 & -O- & CBr_2. \end{array}$$

Si l'on compare la constitution des éthers tétrabromé et octobromé à celle des éthers dichloré et tétrachloré, on reconnaît immédiatement la conformité qui existe entre les deux groupes:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} CH_2Br & & CH_2Br \\ | & & | \\ CHBr & -O- & CHBr \end{array}}_{\text{éther tétrabromé.}} \qquad \underbrace{\begin{array}{ccc} CBr_3 & & CBr_3 \\ | & & | \\ CHBr & -O- & CHBr \end{array}}_{\text{éther octobromé.}}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} CH_2Cl & & CH_3 \\ | & & | \\ CHCl & -O- & CH_2 \end{array}}_{\text{éther dichloré.}} \qquad \underbrace{\begin{array}{ccc} CCl_3 & & CH_3 \\ | & & | \\ CHCl & -O- & CH_2 \end{array}}_{\text{éther tétrachloré.}}$$

Voir, sur la constitution de l'éther dichloré: Lieben [1]), [2]), [3]), Abeljanz [4]), Jacobsen [5]):

sur l'éther tétrachloré: Malaguti [6]), Henry [7]), Wurtz et Vogt [8]), Jacobsen [9]).

Lorsque le chlore se substitue à l'hydrogène dans l'éther éthylique, le remplacement des atomes d'hydrogène a lieu dans l'ordre suivant:

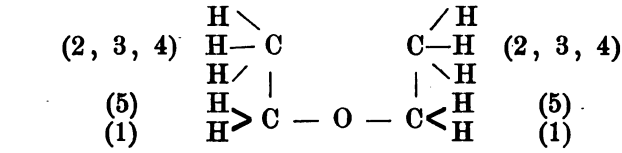
$$\begin{array}{ll} & H\diagdown \\ (2,\ 3,\ 4) & H-C \\ & H\diagup\ \ | \\ (1,\ 5) & \begin{matrix} H \\ H \end{matrix}\!\!> C \\ & \end{array} \begin{array}{c} \\ CH_3 \\ | \\ -O-CH_2 \end{array} \qquad \text{(Jacobsen [10])).}$$

Lors de la formation des éthers bromés qui proviennent de

---

[1]) *Ann. d. Chemie*, t. CXLVI, p. 232.
[2]) *Ber. d. d. chem. Ges.*, t. III, p. 911.
[3]) *Ann. d. Chemie*, t. CLXXVIII, p. 1—48.
[4]) *Ann. d. Chemie*, t. CLXIV, p. 197.
[5]) *Ber. d. d. chem. Ges.*, t. IV, p. 216.
[6]) *Ann. d. Chemie*, t. XXXII, p. 15.
[7]) *Ber. d. d. chem. Ges.*, t. V, p. 101, 435.
[8]) *Compt. rend.*, t. LXXIV, p. 777.
[9]) *Ber. d. d. chem. Ges.*, t. IV, p. 217.
[10]) *Ibidem.*

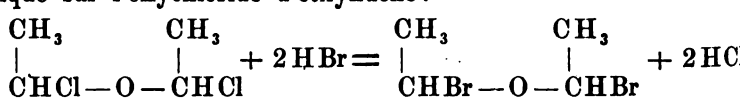
l'oxychloride d'éthylidène, ou éther bichloré symétrique, la même succession dans le remplacement des atomes d'hydrogène s'opère (à en juger du moins par la constitution des deux éthers bromés) deux fois, c'est-à-dire, simultanément dans les deux groupes éthyliques:



Ce mode de substitution est déterminé par la circonstance que dans l'oxychloride d'éthylidène, ainsi qu'on peut l'inférer de la manière dont il se comporte avec l'eau (Lieben [1])), les atomes d'hydrogène qui occupent les positions 1 et 1 sont déjà remplacés par le chlore (voir aussi Kessel [2])). Le chlore, à son tour, est remplacé par le brome.

La question de savoir si l'oxychloride d'éthylidène peut aussi donner naissance à des éthers bromés contenant un nombre impair d'atomes de brome, sera, de ma part, l'objet d'expériences ultérieures.

Il est probable que l'oxybromide d'étylidène, ou éther bibromé symétrique, se laissera obtenir par l'action de l'acide bromhydrique sur l'oxychloride d'éthylidène:



Le tétrabrométhane, mentionné au commencement de ce Mémoire, doit, en tout cas, avoir pris naissance par l'action, à une température élevée, de l'acide bromhydrique sur l'un des éthers bromés.

S'il était identique au tétrabromure d'acétylène ($CHBr_2 - CHBr_2$), sa dérivation d'un éther hexabromé se comprendrait aisément:

[1]) *loc. cit.*

[2]) *Ann. d. Chemie*, t. CLXXV, p. 50.

$$\begin{array}{l} CHBr_2 \\ | \\ CHBr - O - \end{array} \begin{array}{l} CHBr_2 \\ | \\ CHBr \end{array} + 2HBr = OH_2 + 2 \begin{array}{l} CHBr_2 \\ | \\ CHBr_2. \end{array}$$

S'il constitue, au contraire, le tétrabrométhane asymétrique, il doit provenir de l'éther octobromé:

$$\begin{array}{l} CBr_3 \\ | \\ CHBr - O - \end{array} \begin{array}{l} CBr_3 \\ | \\ CHBr \end{array} + 2HBr = OH_2 + 2 \begin{array}{l} CBr_3 \\ | \\ CHBr_2. \end{array}$$

Le pentabrométhane, premier produit de la réaction, devrait alors subir, sous l'influence de HBr, une réduction en tétrabrométhane:

$$\begin{array}{l} CBr_3 \\ | \\ CHBr_2 \end{array} + HBr = Br_2 + \begin{array}{l} CBr_3 \\ | \\ CH_2Br. \end{array}$$

Une pareille action réductive de l'acide bromhydrique n'a toutefois, à ma connaissance, pas encore été observée jusqu'ici.

Un troisième cas serait possible, à savoir, que le tétrabrométhane symétrique se transforme, dans les conditions données, en tétrabrométhane asymétrique. Quelque chose d'analogue est connu quant au bromure d'éthylène, qui, chauffé avec l'acide chlorhydrique concentré, se change en chlorobromure d'éthylidène:

$$\begin{array}{l} CH_2Br \\ | \\ CH_2Br \end{array} + HCl = HBr + \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CHClBr. \end{array}$$

D'autres modes de production ne se laissent guère concevoir dans les circonstances données.

En général, pour un corps de la formule $C_2H_2Br_4$, deux isomères seulement sont possibles:

$$\underbrace{\begin{array}{l} CHBr_2 \\ | \\ CHBr_2 \end{array}}_{\text{tétrabromure d'acétylène.}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{array}{l} CBr_3 \\ | \\ CH_2Br \end{array}}_{\text{tétrabrométhane asymétrique.}}$$

Il est absolument certain que mon tétrabrométhane n'est pas le tétrabromure d'acétylène; très probablement il est identique avec un tétrabrométhane solide obtenu par M. E. Bourgoin, et qui sera décrit tout à l'heure.

M. Sabanejeff [1]), qui a récemment préparé le tétrabromure d'acétylène en grandes quantités et dans un état de pureté parfaite, le décrit comme un „liquide lourd, à odeur aromatique, d'une densité de 2,848 à 21°,5." Quand on le chauffe, il se décompose en H Br et tribrométhylène liquide.

Antérieurement, divers tétrabromures liquides, résultant de l'addition du brome au dibrométhylène, ont été donnés pour des isomères du tétrabromure d'acétylène. Parmi ces corps, le tétrabromure de Reboul [2]) (obtenu par addition de brome au dibrométhylène bouillant à 88°) est indubitablement identique au tétrabromure d'acétylène. Il possédait à 22° la densité 2,88, et ne se laissait pas distiller sans décomposition.

Depuis que M. Tawildarow [3]) a montré que, dans la réaction de l'alcoolate de soude sur le *bromure de monobrométhylène*, ($CH_2Br - CH[Br]Br$, les dibrométhylènes

$$\begin{array}{l} CBrBr \\ \| \\ CH_2 \end{array} \text{ (point d'ébull.: 91°) [4]) et } \begin{array}{l} CHBr \\ \\ CHBr \end{array} \text{ (point d'ébull.: 157°)}$$

prennent tous les deux naissance, on ne peut naturellement regarder comme des corps spécifiquement définis des tétrabromures qui ont été dérivés, par addition, d'un bromure d'éthylidène dont le point d'ébullition n'est pas indiqué. Tel est le cas du tétrabromure de

---

[1]) *Ann. d. Chemie*, t. CLXXIX, p. 109.

[2]) *Ann. d. Chemie*, t. CLXXIV, p. 267.

[3]) *Ann. d. Chemie*, t. CXXVI, p. 12.

[4]) Si l'on admet que le dibrométhylène de Reboul, qui bouillait à 88°, est identique avec celui qui bout à 91° (Tawildarow), le tétrabrométhane de Reboul doit avoir la constitution:

$$\begin{array}{l} CBr.Br.Br \\ | \\ CH_2Br. \end{array}$$

Comme il ne peut guère être question d'une transposition des atomes par la simple addition du brome, nous sommes ici évidemment en présence d'une contradiction, qu'on ne peut lever qu'en attribuant au dibrométhylène bouillant à 91° la constitution

$$\begin{array}{l} CHBr \\ \| \\ CHBr. \end{array}$$

M. Lennox [1]). Ce tétrabromure était liquide à la température ordinaire et se prenait en une masse cristalline dans un mélange réfrigérant. Chauffé à 200°, il éprouvait une décomposition partielle.

M. Tawildarow a aussi isolé un tétrabromure liquide des parties du produit de l'action du brome sur le brométhyle qui avaient le point d'ébullition le plus élevé. Ce tétrabromure ne se solidifiait pas encore à — 20° et bouillait entre 208° et 211°, en se décomposant partiellement. M. Tawildarow lui-même laisse de côté la question de savoir qu'elle est la constitution de ce corps.

Je suis porté à croire que le tétrabromure de Tawildarow était du tétrabromure acétylénique presque pur, et le corps de Lennox un mélange des deux tétrabromures.

M. Behrend [3]) fait mention d'un corps cristallin $C_2H_2Br_4$, qu'il a obtenu, en même temps que du tribrométhylène liquide, en faisant agir le brome sur l'argent-acétylène. Son Mémoire n'indique pas que les deux corps aient été séparés très nettement. Il n'est pas difficile de reconnaître que M. Behrend ne peut avoir eu en mains qu'un mélange de tribrométhylène et de pentabrométhane.

Le résidu de l'argent-acétylène $\begin{array}{c}CH\\|||\\CAg\end{array}$ donnera, en effet, d'abord naissance à $\begin{array}{c}CH\\|||\\CBr\end{array}$, d'où résultera, par adjonction de 1 et de 2 molécules de brome, un mélange de $\begin{array}{c}CHBr\\||\\CBrBr\end{array}$ et $\begin{array}{c}CHBrBr\\|\\CBrBrBr\end{array}$. Les propriétés du corps de Behrend étaient les suivantes: cristallin, soluble dans l'éther, le sulfure de carbone, le chloroforme et le benzol; point de fusion 42° (mon tétrabrométhane fond à 52°).

Dans des essais ayant pour but d'obtenir de l'acide succinique tétrabromé, par l'action du brome et de l'eau sur l'acide succinique dibromé, M. E. Bourgoin [4]) a rencontré un tétrabrométhane

[1]) *Ann. d. Chemie*, t. CXXII, p. 122.
[2]) *loc. cit.*
[3]) *Ann. d. Chemie*, t. CXXXV, p. 257.
[4]) *Ann. de chimie et de physique*, 5e sér., t. II, p. 227.

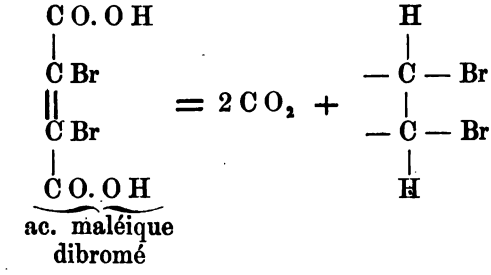
solide. Il ressort très clairement de ses expériences que le tétrabrométhane résultait de l'action ultérieure du brome sur l'acide maléique dibromé, qui apparaissait comme produit intermédiaire, dérivant lui-même de l'acide succinique tribromé par élimination d'acide bromhydrique :

$$C_2HBr_3(CO.OH)_2 = \underbrace{HBr + C_2Br_2(CO.OH)_2}_{\text{ac. maléique dibromé}}$$

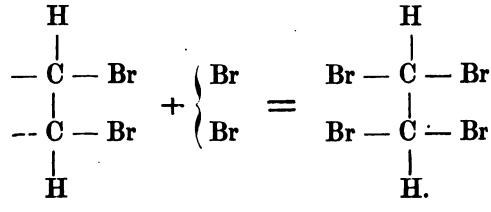
et

$$C_2Br_2(CO.OH)_2 + Br_2 = 2CO_2 + \underbrace{C_2H_2Br_4}_{\text{tétrabrométhane.}}$$

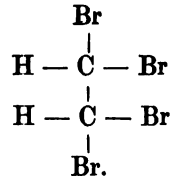
Le tétrabrométhane de M. Bourgoin, récemment préparé, affectait l'état liquide (peut-être, comme le dit l'auteur, par suite du mélange accidentel de petites quantités de substances étrangères). Abandonné à lui-même, il se prenait en masse cristalline. Après une nouvelle cristallisation dans un mélange d'éther et d'alcool, il constituait de superbes aiguilles, longues de plusieurs centimètres, qui fondaient à 54°,5 ; il se colorait peu à peu quand on le chauffait au-dessus de 150°, et bouillait à 206°, avec décomposition partielle. M. Bourgoin regarde son tétrabrométhane comme un isomère du tétrabromure d'acétylène, mais non, toutefois, comme le tétrabrométhane asymétrique ; ce serait donc, d'après lui, un troisième tétrabrométhane, dont il représente la constitution, en ayant égard au mode de naissance, de la manière suivante :



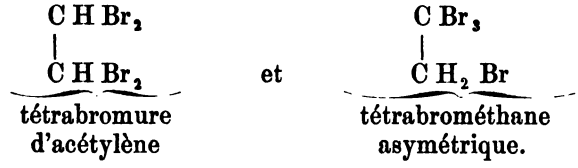
et



Le vrai tétrabromure d'acétylène aurait, selon M. Bourgoin, la constitution :



D'après les idées reçues au sujet de l'isomérie de substitution, ces deux corps ne sauraient être différents. La théorie proposée par M. van 't Hoff (*La Chimie dans l'espace*, Rotterdam, chez Bazendijk, 1875) ne laisse pas non plus (vu qu'aucun des atomes de carbone à liaison simple n'est ce qu'on appelle un atome asymétrique) prévoir plus de deux isomères, à savoir :

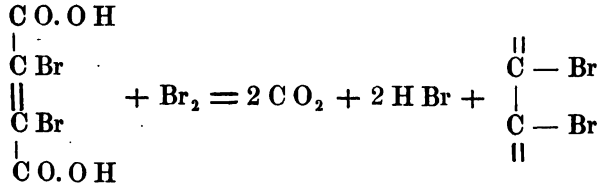


Le tétrabrométhane de Bourgoin, qui ne diffère que très peu par ses propriétés de celui que j'ai obtenu, ne peut guère être autre chose que le tétrabrométhane asymétrique, puisqu'il n'est pas identique avec le tétrabromure d'acétylène.

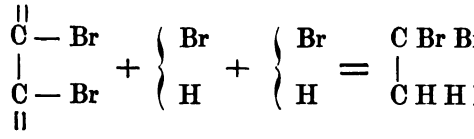
Je ferai observer, du reste, que l'équation de Bourgoin,

$$C_2\,Br_2\,(C\,O.\,O\,H)_2 + Br_2 = C_2\,H_2\,Br_4 + 2\,C\,O_2,$$

permet d'expliquer, tout aussi naturellement, la formation du tétrabrométhane asymétrique, ainsi que le montrent les formules suivantes :



et



ou :

$$\begin{array}{l} CBr_2 \\ \| \\ C < \begin{matrix} CO.OH \\ CO.OH \end{matrix} \end{array} + Br_2 = 2\,HBr + 2\,CO_2 + \begin{array}{l} | \\ CBr_2 \\ | \\ C \\ ||| \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} | \\ CBr_2 \\ | \\ C\equiv \end{array} + \left\{ \begin{array}{l} Br \\ H + HBr \end{array} \right. = \begin{array}{l} CBrBrBr \\ | \\ CHHBr. \end{array}$$

Plus récemment, MM. E. Reboul et E. Bourgoin [1]) ont obtenu, comme produit accessoire, le même tétrabrométhane, fusible à 54—55°, en chauffant l'acide pyrotartrique normal avec le brome et l'eau. Il se forme d'abord de l'acide succinique dibromé, qui, par l'action ultérieure du brome, donne naissance au tétrabromure, comme dans la réaction précédente.

Dans le même numéro du *Bulletin* (p. 395), M. Bourgoin décrit le troisième tétrabrométhane isomère possible d'après lui (bromhydrate d'éthylène tribromé $CBr_2[Br]-CHBr[H] = \left(\begin{array}{l} \quad Br \\ \quad | \\ Br-C-Br \\ \quad | \\ H-C-H \\ \quad | \\ \quad Br \end{array} \right)$,

comme un liquide à odeur camphrée, qui se solidifiait à — 17°, avait à 0° une densité égale à 2,93, et dont la vapeur irritait fortement les yeux. Il distillait à 200°, en se décomposant partiellement. Pour l'obtenir, on avait chauffé l'acide pyrotartrique ordinaire avec du brome et de l'eau, à 130—150°. Les propriétés indiquées par M. Bourgoin ne suffisent pas, à mon avis, pour définir le corps en question comme un troisième tétrabrométhane; il est probable qu'il ne s'agit encore ici que d'un mélange des deux tétrabrométhanes, mélange où prédominerait le tétrabromure d'acétylène.

De tout ce qui vient d'être exposé, il résulte qu'on ne connaît d'une manière certaine que deux tétrabrométhanes, comme l'exige la théorie.

[1]) *Bull. de la Soc. chim. de Paris*, n° 8, t. XXVII, p. 348.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

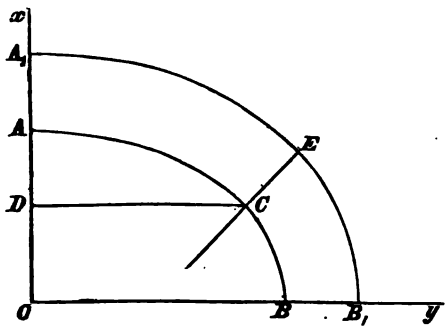
NOTE
SUR
L'ATTRACTION,

PAR

G. F. W. BAEHR.

RADCLIFFE LIBRARY UNIVERSITY MUSEUM OXFORD 2 SEP 78

1.



Soient 0 A = a et 0 B = $b > a$ les demi-axes de l'ellipse méridienne d'un ellipsoïde de révolution autour du petit axe 0 A, et par conséquent aplati aux pôles. Les composantes de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, parallèles aux axes et dirigées vers le centre, sur un point C de la méridienne sont proportionnelles aux coordonnées

$$0\,D = \alpha, \qquad D\,C = \beta,$$

et données par les formules

$$X = \frac{3\,M f \alpha}{a^3\, tang^3 \varphi}\,(tang\,\varphi - \varphi) = p\,\alpha,$$

$$Y = \frac{3\,M f \beta}{2a^3\, tang^3 \varphi}\,(\varphi - sin\,\varphi\, cos\,\varphi) = q\,\beta,$$

dans lesquelles M est la masse de l'ellipsoïde, f l'attraction à l'unité de distance entre deux unités de masse, et

$$tang^2\varphi = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad a = b \cos\varphi.$$

Quand le point C se déplace sur son parallèle, les deux composantes de l'attraction, l'une parallèle à l'axe de révolution, l'autre dans la direction du rayon du parallèle, restent les mêmes, en sorte qu'une courbe orthogonale aux directions de la résultante pour tous les points du méridien A C B, engendrera par révolution autour de l'axe de révolution de l'ellipsoïde une surface dont les normales coïncideront avec la direction de l'attraction aux points où elles rencontrent l'ellipsoïde. Soit

$$F(x, y) = 0,$$

l'équation d'une telle courbe; ses normales coïncideront avec la direction de l'attraction, donnée par les facteurs p et q, indiqués ci-dessus, si l'on a:

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{p\alpha} = \frac{\frac{dF}{dy}}{q\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

où les coordonnées α et β de l'ellipse méridienne satisfont à:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

tandis que l'on a entre x, y, α et β la relation

$$\frac{x - \alpha}{p\alpha} = \frac{y - \beta}{q\beta}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

l'équation (1) donne, ayant égard à (2):

$$\frac{\frac{1}{ap}\frac{dF}{dx}}{\frac{\alpha}{a}} = \frac{\frac{1}{bq}\frac{dF}{dy}}{\frac{\beta}{b}} = N,$$

où

$$N = \sqrt{\frac{1}{a^2 p^2} \cdot \frac{dF^2}{dx^2} + \frac{1}{b^2 q^2} \cdot \frac{dF^2}{dy^2}},$$

donc:

$$\alpha = \frac{1}{pN} \frac{dF}{dx}, \qquad \beta = \frac{1}{qN} \frac{dF}{dy},$$

et par substitution dans (3):

$$\frac{x - \frac{1}{pN} \cdot \frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{y - \frac{1}{qN} \frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dy}},$$

ou

$$N\left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy}\right) = \frac{p-q}{pq} \cdot \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dF}{dy}.$$

On satisfait à cette équation en posant:

$$\frac{dF}{dx} = Ax, \quad \frac{dF}{dy} = By,$$

A et B étant des constantes à déterminer, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{A^2}{a^2 p^2} x^2 + \frac{B^2}{b^2 q^2} y^2} \cdot (A - B) = \frac{p-q}{pq} AB,$$

ou

$$\frac{A^2}{a^2 p^2} x^2 + \frac{B^2}{b^2 q^2} y^2 = \left(\frac{p-q}{pq}\right)^2 \left(\frac{AB}{A-B}\right)^2; \quad \ldots (4)$$

donc, on devra avoir:

$$\frac{2A^2}{a^2 p^2} = A, \qquad \frac{2B^2}{b^2 q^2} = B,$$

ou

$$A = \frac{1}{2} a^2 p^2, \qquad B = \frac{1}{2} b^2 q^2,$$

et l'équation (4) de la courbe orthogonale devient:

$$a^2 p^2 x^2 + b^2 q^2 y^2 = \frac{p^2 q^2 (p-q)^2 a^4 b^4}{(a^2 p^2 - b^2 q^2)^2} \quad \ldots . (5)$$

Des valeurs de p et q on déduit facilement:

$$\begin{aligned} p &> q, \qquad\qquad (6) \\ a\,p &> b\,q, \\ a^2 p &< b^2 q; \end{aligned}$$

la courbe (5) est donc une ellipse, dont les axes de même nom coïncident avec ceux du méridien de l'ellipsoïde.

On parvient au même résultat en cherchant l'enveloppe de la droite suivant laquelle est dirigée l'attraction pour les différents points du méridien ACB; l'équation de cette droite pour un point quelconque étant:

$$y - \beta = \frac{q\,\beta}{p\,\alpha}(x - \alpha), \qquad (7)$$

où α et β sont des paramètres variables, liés par la relation (2), qui donne

$$\frac{d\,\alpha}{d\,\beta} = -\frac{a^2\,\beta}{b^2\,\alpha},$$

on a, différentiant par rapport à β,

$$-1 = \frac{q}{p}(x - \alpha)\frac{\alpha - \beta\dfrac{d\,\alpha}{d\,\beta}}{\alpha^2} - \frac{q\,\beta}{p\,\alpha}\frac{d\,\alpha}{d\,\beta},$$

ou

$$-1 = \frac{q}{p}(x - \alpha)\frac{a^2}{\alpha^3} + \frac{a^2\,\beta^2}{b^2\,\alpha^2}\cdot\frac{q}{p},$$

ce qui après réduction donne la première des expressions ci-dessous, tandis que l'on obtient analoguement la seconde:

$$\frac{a^2 x}{\alpha^3} = -\frac{p - q}{q}, \quad \frac{b^2 y}{\beta^3} = \frac{p - q}{p};$$

on trouve l'équation de l'enveloppe en éliminant au moyen de ces dernières relations les paramètres α et β dans l'équation (7), et après quelques réductions on obtient

$$\left\{\frac{x}{\frac{a(p-q)}{q}}\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\frac{y}{\frac{b(p-q)}{p}}\right\}^{\frac{2}{3}}=1,$$

dans laquelle on reconnaît l'équation de la développée d'une ellipse, dont les demi-axes A et B sont dans le rapport

$$A:B=\frac{q}{a}:\frac{p}{b}=bq:ap,$$

en sorte que A est le plus petit, et qui sont entièrement déterminés par les relations connues

$$\frac{B^2-A^2}{A}=\frac{a(p-q)}{q}\quad,\quad\frac{B^2-A^2}{B}=\frac{b(p-q)}{p},$$

qui donnent

$$A=\frac{ab^2(p-q)q}{a^2p^2-b^2q^2},\quad B=\frac{a^2b(p-q)p}{a^2p^2-b^2q^2},$$

ce qui s'accorde avec (5).

On déduit de ces valeurs pour les différences des axes de même nom des deux ellipses, AA_1 et BB_1 dans la figure,

$$A-a=\frac{ap(b^2q-a^2p)}{a^2p^2-b^2q^2},\quad B-b=\frac{bq(b^2q-a^2p)}{a^2p^2-b^2q^2},$$

qui, en vertu de (6), sont des quantités positives, et: *proportionnelles à ap et bq*, c'est-à-dire, *à l'attraction pour les points placés aux sommets de l'ellipsoïde.*

En vertu de l'équation (5), trouvée pour l'ellipse orthogonale A_1EB_1, l'équation (1) devient

$$\frac{a^2p^2x}{p\alpha}=\frac{b^2q^2y}{q\beta},$$

qui est une relation entre les coordonnées des points C et E; elle donne, ayant égard à (2) et (5),

$$\frac{apx}{\frac{\alpha}{a}}=\frac{bqy}{\frac{\beta}{b}}=\frac{pq(p-q)a^2b^2}{a^2p^2-b^2q^2},$$

d'où

$$x = \alpha \frac{q(p-q)b^2}{a^2p^2 - b^2q^2},$$

et

$$x - \alpha = \alpha \frac{p(b^2q - a^2p)}{a^2p^2 - b^2q^2},$$

en sorte que (7) devient

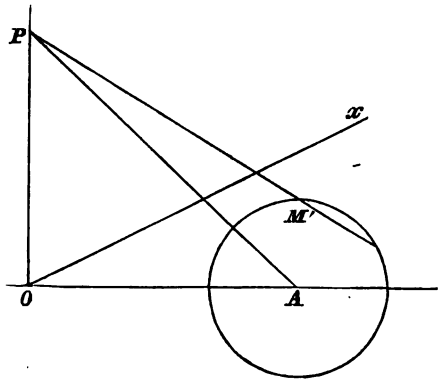
$$\frac{x-\alpha}{p\alpha} = \frac{y-\beta}{q\beta} = \frac{b^2q - a^2p}{a^2p^2 - b^2q^2},$$

et par conséquent

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \frac{b^2q - a^2p}{a^2p^2 - b^2q^2} \sqrt{(p\alpha)^2 + (q\beta)^2}.$$

C'est-à-dire: *la partie C E de la normale en E sera proportionnelle à l'attraction sur le point C.*

2.



On peut réduire aux intégrales elliptiques l'attraction d'un tore sur un point matériel placé dans son axe de révolution. Soient, O le centre du tore, $OA = a$ le rayon du cercle décrit par le centre A du cercle générateur, et $r < a$ le rayon de celui-ci; $OP = \gamma$ la distance du centre au point attiré P, $AP = l$ et l'angle $OPA = \delta$; $MP = u$ la distance d'un point quelconque de la masse du tore au point attiré; φ l'angle APM entre u

et l, et ψ l'angle entre le méridien de M et un méridien fixe P O x, alors

$$du \times ud\varphi \times u \sin(\delta + \varphi)\, d\psi$$

est l'élément de volume du tore, et par conséquent la composante de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, de l'élément en M sur P, estimée dans la direction P O, sera

$$f m \mu\, du\, d\varphi\, d\psi \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi),$$

où f est l'attraction à l'unité de distance entre deux unités de masse, m la masse du point attiré, et μ la masse de l'unité de volume du tore.

Les composantes de l'attraction perpendiculaires à l'axe se détruisent mutuellement, en sorte que l'on aura pour l'attraction totale Z, suivant la direction P O,

$$Z = f m \mu \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{u_0}^{u_1} \sin(\delta + \varphi) \cos(\delta + \varphi)\, du,$$

où les limites de u sont

$$u_0 = l \cos\varphi - \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2\varphi},$$
$$u_1 = l \cos\varphi + \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2\varphi};$$

et celles de φ,

$$\sin\varphi_0 = -\frac{r}{l}, \qquad \sin\varphi_1 = +\frac{r}{l},$$

tandis que l'intégration par rapport à ψ revient à multiplier par 2π, donc on aura

$$Z = 2\pi f m \mu \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin 2(\delta + \varphi) \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi.$$

Si l'on développe le sinus devant le radical, cette intégrale se divise en deux parties, dont l'une, ayant $\sin 2\psi$ en facteur,

a ses éléments deux à deux égaux mais de signes contraires, de sorte qu'elle disparaît, et qu'il reste

$$Z = 2\pi f m \mu \sin 2\delta \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos 2\varphi \sqrt{r^2 - l^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi.$$

Or, on a:

$$\int \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \cos 2\varphi = \int \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \,.\, (1 - 2\sin^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \int \frac{r^2 - (2r^2 + l^2)\sin^2\varphi + 2 l^2 \sin^4\varphi}{\sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}} d\varphi,$$

et en différentiant:

$$d \,.\, \sin\varphi \cos\varphi \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} = \frac{r^2 - 2(r^2 + l^2)\sin^2\varphi + 3 l^2 \sin^4\varphi}{\sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}} d\varphi;$$

éliminant au moyen de cette formule $\sin^4\varphi$, et remarquant que l'intégrale du premier membre, prise entre φ_0 et $\varphi_1 = -\varphi_0$, est zéro, on parvient à

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)} \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{r^2 - (2r^2 - l^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{(r^2 - l^2 \sin^2\varphi)}} d\varphi.$$

Posant $l \sin\varphi = r \sin\psi$, ce qui donne $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$ pour les limites de ψ, la dernière intégrale se réduit à

$$\frac{r^2}{3 l^3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l^2 - (2r^2 - l^2)\sin^2\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\psi)}} d\psi,$$

où le *module* k est donné par

$$k = \frac{r}{l}.$$

Dans celle-ci on peut prendre pour limites 0 et $\frac{1}{2}\pi$, si l'on double en même temps le résultat; alors elle devient

$$\frac{2}{3l}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[(l^2-r^2)\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2 sin^2\psi)}}+(2r^2-l^2)\sqrt{1-k^2 sin^2\psi)}d\psi\right],$$

et portant cette valeur dans Z, ayant égard que

$$l^2=a^2+\gamma^2,\quad sin\,2\,\delta=\frac{2a\gamma}{a^2+\gamma^2},$$

on obtient:

$$Z=\frac{8}{3}\pi f m\mu\frac{a\gamma}{(a^2+\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\left[(a^2+\gamma^2-r^2)F(k)-(a^2+\gamma^2-2r^2)E(k)\right],$$

F (k) et E (k) représentant les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce.

L'attraction du tore sur un point quelconque est dirigée, comme dans le cas de chaque corps de révolution, dans le plan méridien qui passe par ce point, parce que les composantes perpendiculaires à ce plan se détruisent mutuellement. Si donc on rapporte le tore à son axe de figure O Z et à deux rayons rectangulaires O X et O Y, tellement que le plan X O Z contienne le point attiré, l'attraction totale sera la résultante de deux composantes dirigées dans ce plan.

Soient: $x=\alpha$ et $z=\gamma$ les coordonnées du point attiré P;

u la distance de P à un point M de la surface du tore;

$d\,s$ l'élément de surface au point M dont les coordonnées sont x, y, z;

(N z) l'angle entre la normale extérieure en M et l'axe des z positifs;

F (u) l'attraction entre deux unités de masse à la distance u, et $F_1(u)=\int F(u)\,d\,u$.

D'après un théorème de Gauss on obtient l'attraction d'un corps homogène sur un point P, estimée suivant la direction des z négatifs, en multipliant l'intégrale

$$-\int F_1(u) \cos(N.z)\, ds,$$

étendue à toute la surface, par le produit de la masse du point attiré et de la masse de l'unité de volume du corps.

Si dans l'intégrale on prend au lieu de l'angle (Nz), l'angle (Nx) que la normale extérieure fait avec les x positifs, on obtient la composante dans la direction des x négatifs.

Pour obtenir cette intégrale, soient

$$x = (a + r \cos\varphi) \cos\vartheta,$$
$$y = (a + r \cos\varphi) \sin\vartheta,$$
$$z = r \sin\varphi,$$

qui satisfont identiquement à l'équation du tore:

$$\left[a - \sqrt{x^2 + y^2}\right]^2 + z^2 = r^2,$$

en sorte que ϑ est l'angle que le méridien d'un point quelconque M de la surface du tore fait avec le plan X O Z, et φ l'angle entre le rayon du cercle générateur, mené dans ce méridien au point M, et le rayon du tore.

Ces valeurs de x, y et z donnent pour l'élément de la surface

$$ds = r(a + r \cos\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi,$$

et l'on aura

$$\cos(N.x) = \cos\varphi \cos\vartheta, \quad \cos(N.z) = \sin\varphi,$$

et, l'attraction étant en raison inverse du carré de la distance,

$$F(u) = \frac{f}{u^2}, \text{ d'où } F_1(u) = -\frac{f}{u},$$

tandis que

$$u = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2} = \sqrt{p - q \cos\vartheta},$$

en posant

$$p = a^2 + r^2 + \alpha^2 + \gamma^2 + 2\,r\,(a \cos\varphi - \gamma \sin\varphi),$$
$$q = 2\,\alpha\,(a + r \cos\varphi),$$

en sorte que la composante de l'attraction, dans le sens des z négatifs, est:

$$Z = f m \mu r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a + r \cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta}{\sqrt{(p - q \cos\vartheta)}}.$$

Intégrant premièrement par rapport à ϑ, l'on a, posant $\frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \psi$, ce qui donne $\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{1}{2}\pi$ pour limites de ψ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(p - q \cos\vartheta)}} = 2 \int \frac{d\,\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{(p + q - 2\,q \cos^2 \frac{1}{2}\vartheta)}} = 2 \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{-d\psi}{\sqrt{(p + q - 2\,q \sin^2\psi)}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(p + q)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\psi)}},$$

où le module k est donné par

$$k^2 = \frac{2\,q}{p + q}.$$

Une intégration ultérieure ne semble possible que dans le cas de $\alpha = 0$, en sorte que $q = 0$ et $k = 0$; on a alors, faisant comme précédemment $a^2 + \gamma^2 = l^2$,

$$Z = 2\,\pi\, f m \mu r \int_0^{2\pi} \frac{(a + r \cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(l^2 + r^2 + 2\,r\,(a \cos\varphi - \gamma \sin\varphi))}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\gamma}{a} = \tang \delta \quad \text{et} \quad \varphi + \delta = \psi,$$

l'intégrale se réduit à

$$\int_{\delta}^{2\pi+\delta} \frac{a \sin(\psi - \delta) + \frac{1}{2} r \sin 2(\psi - \delta)}{\sqrt{(l^2 + r^2 + 2 l r \cos \psi)}} d\psi,$$

où l'on peut changer les limites en 0 et 2π, parce que les éléments de 2π à $2\pi + \delta$ sont égaux à ceux de 0 à δ. Développant les sinus au numérateur, cette intégrale se divise en deux parties, dont l'une a pour numérateur

$$(a \cos \delta + r \cos \psi \cos 2\delta) \sin \psi \,.\, d\psi,$$

et dont l'intégrale prise entre les limites 0 et 2π est zéro, parce que dans cet intervalle ses éléments se détruisent deux à deux, en sorte qu'il reste

$$-\int_{0}^{2\pi} \frac{(a \cos \psi + r \cos 2\psi \cos \delta) \sin \delta}{\sqrt{(l^2 + r^2 + 2 l r \cos \psi)}} d\psi,$$

ce qui, si l'on y substitue:

$$\cos \delta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+\gamma^2)}} = \frac{a}{l}, \quad \sin \delta = \frac{\gamma}{l},$$

devient:

$$-\frac{a\gamma}{l^2} \int_{0}^{2\pi} \frac{l \cos \psi + r \cos 2\psi}{\sqrt{(l^2+r^2+2 l r \cos \psi)}} d\psi,$$

ou

$$-\frac{a\gamma}{l^2} \int_{0}^{2\pi} \frac{(l + r) - 2(l + 4r) \sin^2 \frac{1}{2}\psi + 8 r \sin^4 \frac{1}{2}\psi}{\sqrt{((l + r)^2 - 4 l r \sin^2 \frac{1}{2}\psi)}} d\psi,$$

ou bien

$$-\frac{2 a \gamma}{l^2 (l + r)} \int_{0}^{\pi} \frac{(l + r) - 2(l + 4r) \sin^2 \psi + 8 r \sin^4 \psi}{\sqrt{(1 - k_1{}^2 \sin^2 \psi)}} d\psi,$$

dans laquelle

$$k_1{}^2 = \frac{4lr}{(l+r)^2};$$

en différentiant le produit $\Delta \sin\psi \cos\psi$, où Δ désigne le radical au dénominateur de l'intégrale, on obtient la formule de réduction :

$$\frac{\sin^4\psi\, d\psi}{\Delta} = \frac{2(1+k^2)}{3k^2} \cdot \frac{\sin^2\psi\, d\psi}{\Delta} - \frac{d\psi}{3k^2\Delta} + d(\Delta \sin\psi \cos\psi),$$

au moyen de laquelle on peut éliminer $\sin^4\psi$, et remarquant que l'intégrale du dernier terme au second membre de cette formule est zéro, l'intégrale précédente devient

$$-\frac{4a\gamma}{3l^3(l+r)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(l+r)(l-2r) - 2(l^2-2r^2)\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k_1{}^2\sin\psi)}} d\psi,$$

qui, ayant égard à l'identité :

$$\sin^2\psi = \frac{1-(1-k^2\sin^2\psi)}{k^2},$$

se réduit enfin à

$$\frac{2a\gamma}{3l^4 r}\left[(l-r)(l^2+2r^2)\,\mathrm{F}(k_1) - (l+r)(l^2-2r^2)\,\mathrm{E}(k_1)\right],$$

et ce résultat multiplié par $2\pi f m \mu r$ donne Z.

Pour montrer l'accord avec la formule obtenue précédemment, on observe que

$$k_1{}^2 = \frac{4lr}{(l+r)^2} = \frac{4\frac{r}{l}}{\left(1+\frac{r}{l}\right)^2} = \frac{4k}{(1+k)^2};$$

il existe donc entre les modules k_1 et k la relation qui permet d'appliquer la transformation de Landen, laquelle donne pour les intégrales complètes de la première espèce :

$$\mathrm{F}(k_1) = (1+k)\,\mathrm{F}(k) = \frac{l+r}{l}\,\mathrm{F}(k),$$

et pour celles de la deuxième espèce:

$$(1 - k^2)\,F(k) = 2\,E(k) - (1 + k)\,E(k_1),$$

d'où

$$E(k_1) = \frac{2}{1 + k}\,E(k) - (1 - k)\,F(k),$$

c'est-à-dire

$$E(k_1) = \frac{2\,l}{l + r}\,E(k) - \frac{l - r}{l}\,F(k).$$

Substituant ces valeurs pour $F(k_1)$ et $E(k_1)$, le coefficient de $F(k)$ devient:

$$\frac{(l^2 - r^2)(l^2 + 2\,r^2)}{l} + \frac{(l^2 - r^2)(l^2 - 2\,r^2)}{l},$$

ou

$$2\,l\,(l^2 - r^2);$$

celui de $E(k)$

$$-\,2\,l\,(l^2 - 2r^2);$$

et le facteur devant les crochets sera:

$$2\,\pi\,f\,m\,\mu \times \frac{2\,a\,\gamma}{3\,l^4 r} \times 2\,l,$$

ou

$$\frac{8}{3}\,\pi\,f\,m\,\mu\,\frac{a\,\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La composante dans le sens des x négatifs est:

$$X = f\,m\,\mu\,r \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a + r\cos\varphi)\cos\varphi\cos\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta}{\sqrt{(p - q\cos\vartheta)}};$$

faisant $\vartheta = 2\pi - 2\psi$, on a:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(p - q\cos\vartheta)}} = \frac{4}{\sqrt{(p+q)}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\sin^2\psi - 1}{\sqrt{(1 - k^2\sin\psi)}} d\psi,$$

où

$$k^2 = \frac{2q}{p+q},$$

et qui se réduit à

$$\frac{4}{\sqrt{(p+q)}} \left[\frac{2-k^2}{k^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \sqrt{(1-k^2\sin\psi)} \right];$$

mais ici une réduction ultérieure ne paraît possible, même si le point attiré est placé dans l'axe des x, ou si $\gamma = 0$, que dans le cas où en même temps

$$\alpha^2 = a^2 - r^2,$$

c'est-à-dire, dans le cas où le point attiré est dans le plan équateur du tore, à une distance du centre égale à la tangente menée du centre à sa surface.

Dans ce cas on a:

$$p = 2a(a + r\cos\varphi),$$
$$q = 2\alpha(a + r\cos\varphi),$$
$$k^2 = \frac{2\alpha}{a+\alpha},$$

et le résultat ci-dessus devient:

$$\frac{4}{\sqrt{2(a+\alpha)(a + r\cos\varphi)}} \cdot \left[\frac{a}{\alpha} \mathrm{F}(k) - \frac{a+\alpha}{\alpha} \mathrm{E}(k) \right],$$

en sorte qu'il reste donc à réduire l'intégrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a + r\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(a + r\cos\varphi)}},$$

qui, faisant

$$\tfrac{1}{2}\varphi = \psi \quad \text{et} \quad k_1^2 = \frac{2r}{a+r},$$

devient:

$$\frac{4}{\sqrt{(a+r)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(a+r) - 2(a+2r)\sin^2\psi + 4r\sin^4\psi}{\sqrt{(1-k_1^2\sin\psi)}}\, d\psi,$$

ou, éliminant $\sin^4\psi$,

$$\frac{4}{3\sqrt{(a+r)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2(a+r) - 2a\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k_1^2\sin^2\psi)}}\, d\psi,$$

ce qui se réduit à:

$$\frac{4\sqrt{a+r}}{3r}\Big[(2r-a)\,\mathrm{F}(k_1) + a\,\mathrm{E}(k_1)\Big],$$

et l'on trouve finalement dans ce cas particulier:

$$\mathrm{X} = \frac{16}{3\sqrt{2}} f m \mu \, \frac{[a\mathrm{F}(k) - (a+\alpha)\mathrm{E}(k)]\,[(2r-a)\mathrm{F}(k_1) + a\mathrm{E}(k_1)]}{\sqrt{(a+\alpha)(a-r)}}.$$

DELFT, Mars 1878.

SUR LES VARIATIONS

DE LA

DÉCLINAISON MAGNÉTIQUE EN NÉERLANDE,

DÉDUITES DE VINGT ANNÉES D'OBSERVATIONS AU HELDER,

PAR

J. P. VAN DER STOK,

Vice-Directeur de l'Observatoire de Batavia.

En vue de l'étude spéciale des variations diurnes de la déclinaison, de l'intensité horizontale et de l'intensité verticale, on a établi au Helder, en 1854, des instruments de variation conformes aux dispositions recommandées par M. Lamont, de Munich, et depuis le commencement de 1855 l'Annuaire de l'Institut météorologique d'Utrecht a publié une série presque ininterrompue d'observations concernant les trois éléments du magnétisme terrestre tant à Utrecht qu'au Helder. Ces dernières observations ont été faites par M. van der Ster, trois fois par jour, savoir, à 2, 8 et 20 heures, temps astronomique. En 1855, les états de l'aiguille aux heures d'observation ont été donnés sans changement; de 1856 à 1866, on a donné l'état à 2 heures et la différence d'état entre 2 et 20 heures et entre 2 et 8 heures. Après 1866, on a publié l'état moyen à 2 heures pour chaque dizaine de jours, avec les écarts journaliers; en outre, les différences 2—20 et 2—8, comme précédemment. Ce dernier système a été adopté pour permettre une comparaison rapide des observations faites au Helder avec les observations simultanées d'Utrecht. Pour la mise en œuvre des matériaux, toutefois, ce mode de publication offre des difficultés, que je n'ai pu surmonter qu'au prix de grands sacrifices de temps.

Pour différentes raisons, je me suis borné au calcul des seules observations de déclinaison. Dans les appareils servant à la détermination des deux autres éléments, le zéro de l'échelle change continuellement, à cause de l'excitation continue de magnétisme permanent dans les barreaux de fer doux, de sorte qu'on ne peut faire aucun usage des états observés.

Il est vrai que cette circonstance n'ôte rien de leur valeur aux différences pour chaque jour séparé; mais ici se présente un autre inconvénient, à savoir, que les heures d'observation ne coïncident pas avec les instants du maximum et du minimum, et que par suite il y a de fortes erreurs à la fois quant au temps et quant à la variation. Les différences données ne fournissent donc pas, comme pour la déclinaison, un tableau fidèle du *range*, et on ne saurait, en conséquence, leur attribuer une valeur égale.

De la même cause résulte aussi l'inconstance du signe des différences, inconstance qui est un grave embarras pour le calcul. Enfin, l'expérience acquise par des observateurs d'une habileté reconnue a appris que, outre la température, la torsion et l'humidité, d'autres influences, moins bien connues, agissent aussi sur les appareils de variation, dont les résultats ne deviennent utilisables que lorsqu'ils sont soumis au contrôle sévère et assidu de déterminations absolues.

Comme on le verra plus loin, la difficulté que je viens de signaler affecte aussi la déclinaison, mais à un moindre degré.

Le but que je me suis proposé dans ce travail est de résoudre la question de savoir jusqu'à quel point des observations faites, comme au Helder, seulement trois fois par jour et sans le contrôle de déterminations absolues [1]), mais continuées pendant longtemps et exécutées par un observateur consciencieux, peuvent conduire à des valeurs comparables avec celles qui ont été déduites

---

[1]) Les déterminations absolues des premières années ont été faites avec une boussole ordinaire et ne peuvent être par conséquent d'aucun secours pour la recherche dont il s'agit. Les déterminations accomplies à Utrecht n'ont pas été comparées avec des observations *simultanées* de variation, ce qui exclut la possibilité de corriger le Helder par Utrecht.

ailleurs d'observations horaires; à ma connaissance, une série aussi étendue que celle du Helder n'a encore jamais été calculée.

Les résultats auxquels je suis parvenu fournissent, d'une part, la preuve que des observations faites trois fois par jour sont pleinement suffisantes pour apprendre à connaître les phénomènes, lorsqu'elles sont appuyées d'observations horaires accomplies dans quelques stations principales distribuées sur la surface du globe; d'autre part, ces résultats mettent en évidence la grande exactitude avec laquelle M. van der Ster s'est acquitté de sa tâche.

Mon travail se partage dans les six sections suivantes:

1°. Déviation diurne de l'aiguille aimantée; valeurs normales.
2°. Période annuelle de la déviation diurne.
3°. Variation séculaire de la déviation diurne (période décennale); comparaison avec les nombres relatifs des taches solaires, de M. Wolf.
4°. Perturbations magnétiques.
5°. Variation de la déclinaison absolue; période annuelle.
6°. Influence de la lune sur la déclinaison.

1°. Déviation diurne de l'aiguille aimantée.

Dans le calcul de la marche diurne, il a été admis, comme première approximation, que la position moyenne (m) de chaque jour peut être fournie par la moyenne des trois observations données. En désignant les positions à 20, 2 et 8 heures par a, b et c, on trouve dans les Annuaires, pour chaque mois, les valeurs moyennes de

$$b - a = f, \; b \text{ et } b - c = f'.$$

Les déviations cherchées $m - a$, $m - b$, $m - c$ sont donc:

$$\frac{-2f + f'}{3}, \; \frac{f + f'}{3}, \; \frac{-2f' + f}{3}.$$

Ces valeurs, exprimées en parties de l'échelle, sont réunies, pour les différents mois et les différentes années, dans le tableau suivant:

TABLEAU I.

Variation diurne de la déclinaison.

	JANVIER.			FÉVRIER.			MARS.		
	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8
1855	—0,83	+2,74	—1,91	—,066	+4,00	—3,34	—3,11	+5,28	—2,18
1856	—0,08	+1,70	—1,62	—0,92	+3,71	—2,79	—2,73	+4,82	—2,09
1857	—0,63	+2,24	—1,61	—2,44	+4,08	—1.64	—2,36	+4,67	—2,31
1858	—2,02	+3,30	—1,28	—2,27	+5,26	—2,99	—2,96	+7,46	—4,50
1859	—1,63	+3,37	—1,74	—3,83	+5,45	—1,62	—4,51	+6,79	—2,28
1860	—2,43	+3,67	—1,24	—3,28	+6,11	—2,83	—5,68	+8,83	—3,15
1861	—0,42	+4,63	—4,21	—3,16	+6,01	—2,85	—4,46	+7,49	—3,03
1862	—0,96	+2,84	—1,88	—1,26	+4,57	—3,31	—4,12	+5,22	—1,10
1863	—0,87	+3,88	—3,01	—2,04	+4,44	—2,40	—3,51	+5,87	—2,36
1864	—0,62	+3,52	—2,90	—1,96	+3,49	—1,53	—4,05	+6,34	—2,29
1865	+0,86	+1,54	—2,40	—0,17	+3,05	—2,88	—3,47	+6,53	—3,06
moyenne .	—0,88	+3,04	—2,16	—2,00	+4,56	—2,56	—3,72	+6,30	—2,58
1864	—0,62	+3,52	—2,90	—1,96	+3,49	—1,53	—4,05	+6,34	—2,29
1865	+0,86	+1,54	—2,40	—0,17	+3,05	—2,88	—3,47	+6,53	—3,06
1866	—0,62	+2,77	—2,15	—2,06	+4,51	—2,45	—1,14	+5,18	—4,04
1867	—0,16	+2,11	—1,95	—1,38	+4,19	—2,81	—2,16	+5,62	—3,46
1868	—0,84	+2,14	—1,30	—1,52	+3,80	—2,28	—3,35	+5,75	—2,40
1869	—0,52	+3,66	—3,14	—1,53	+4,62	—3,09	—2,92	+6,62	—3,70
1870	—1,15	+2,82	—1,67	—2,86	+4,68	—1,82	—5,25	+7,94	—2,69
1871	—2,18	+3,76	—1,58	—3,30	+6,16	—2,86	—6,83	+6,82	+0,01
1872	—2,28	+4,82	—2,54	—2,82	+4,08	—1,26	—4,15	+6,76	—2,61
1873	+0,09	+4,94	—5,03	—1,96	+4,46	—2,50	—3,49	+6,04	—2,55
1874	—0,69	+3,47	—2,78	—2,36	+4,16	—1,80	—3,33	+5,62	—2,29
moyenne .	—0,74	+3,23	—2,49	—1,99	+4,29	—2,30	—3,65	+6,29	—2,64
valeurs normales.	—0,90	+3,19	—2,29	—2,09	+4,54	—2,45	—3,68	+6,28	—2,60

TABLEAU I.

Variation diurne de la déclinaison.

	AVRIL.			MAI.			JUIN.		
	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8
1855	—4,31	+6,51	—2,20	—3,44	+5,36	—1,91	—3,78	+5,08	—1,30
1856	—4,55	+5,40	—0,85	—3,73	+4,78	—1,05	—5,06	+5,60	—0,54
1857	—3,73	+5,40	—1,67	—4,61	+5,72	—1,11	—4,85	+5,22	—0,37
1858	—4,95	+7,47	—2,52	—5,42	+6,12	—0,70	—3,62	+5,44	—1,82
1859	—7,42	+8,66	—1,24	—5,26	+6,26	—1,00	—5,59	+6,41	—0,83
1860	—5,86	+7,28	—1,43	—5,88	+6,34	—0,46	—6,87	+7,59	—0,72
1861	—7,01	+9,04	—2,03	—6,18	+7,17	—0,99	—6,21	+7,22	—1,01
1862	—3,94	+6,72	—2,78	—3,84	+4,84	—1,00	—5,88	+7,03	—1,15
1863	—4,71	+7,04	—2,33	—4,92	+6,59	—1,67	—5,37	+6,25	—0,88
1864	—3,18	+6,49	—3,31	—4,03	+5,52	—1,49	—4,39	+5,54	—1,15
1865	—1,82	+3,97	—2,15	+2,39	—0,28	—2,11	—0,07	+2,51	—2,44
moyenne	—4,68	+6,73	—2,05	—4,08	+5,31	—1,23	—4,70	+5,81	—1,11
1864	—3,18	+6,49	—3,31	—4,03	+5,52	—1,49	—4,39	+5,54	—1,15
1865	—1,82	+3,97	—2,15	+2,39	—0,28	—2,11	—0,07	+2,51	—2,44
1866	—2,98	+6,09	—3,11	—3,63	+5,54	—1,91	—3,98	+5,56	—1,58
1867	—3,34	+5,82	—2,48	—2,72	+4,07	—1,35	—3,78	+4,69	—0,91
1868	—4,44	+7,07	—2,63	—2,87	+4,10	—1,23	—3,69	+5,01	—1,32
1869	—4,23	+8,13	—3,90	—4,19	+4,96	—0,77	—5,54	+6,88	—1,34
1870	—6,22	+7,84	—1,62	—7,29	+7,83	—0,54	—7,02	+6,96	+0,06
1871	—6,32	+8,65	—2,33	—5,60	+6,20	—0,60	—7,73	+7,74	—0,01
1872	—5,51	+8,51	—3,00	—5,32	+6,34	—1,02	—5,78	+7,70	—1,92
1873	—5,91	+7,45	—1,54	—4,07	+5,63	—1,56	—3,26	+6,34	—3,08
1874	—4,70	+6,35	—1,65	—4,63	+5,54	—0,91	—5,25	+4,29	+0,96
moyenne	—4,42	+6,94	—2,52	—3,81	+5,04	—1,23	—4,59	+5,75	—1,16
valeurs normales	—4,75	+6,99	—2,24	—4,26	+5,43	—1,17	—4,88	+5,95	—1,07

TABLEAU I.

Variation diurne de la déclinaison.

	JUILLET.			AOÛT.			SEPTEMBRE.		
	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8
1855	—3,88	+4,92	—1,04	—3,74	+5,65	—1,91	—2,60	+4,38	—1,78
1856	—4,15	+4,62	—0,47	—3,79	+5,23	—1,44	—2,77	+5,09	—2,32
1857	—4,20	+4,86	—0,66	—3,11	+4,86	—1,75	—1,24	+4,18	—2,94
1858	—5,13	+6,34	—1,21	—4,54	+6,49	—1,95	—4,80	+6,86	—1,88
1859	—5,55	+6,96	—1,41	—5,43	+7,53	—2,10	—5,01	+7,68	—2,67
1860	—6,83	+7,33	—0,50	—5,79	+7,37	—1,58	—4,77	+6,23	—1,46
1861	—5,22	+6,03	—0,81	—4,65	+7,16	—2,51	—3,41	+6,34	—2,93
1862	—5,04	+6,49	—1,45	—3,50	+6,09	—2,59	—2,46	+5,46	—3,00
1863	—4,76	+6,16	—1,40	—4,27	+6,37	—2,10	—2,33	+4,47	—2,14
1864	—4,49	+5,84	—1,35	—5,04	+6,65	—1,61	—2,21	+3,49	—1,28
1865	—2,67	+4,27	—1,60	—3,20	+6,05	—2,85	—1,36	+4,22	—2,86
moyenne.	—4,72	+5,80	—1,08	—4,28	+6,31	—2,04	—3,00	+5,30	—2,30
1864	—4,49	+5,84	—1,35	—5,04	+6,65	—1,60	—2,21	+3,49	—1,28
1865	—2,67	+4,27	—1,60	—3,20	+6,05	—2,85	—1,36	+4,21	—2,86
1866	—3,60	+4,85	—1,25	—2,77	+4,76	—1,99	—0,65	+3,79	—3,14
1867	—4,06	+5,02	—0,96	—1,84	+4,72	—2,88	—1,12	+4,49	—3,37
1868	—3,45	+5,76	—2,31	—3,33	+5,45	—2,12	—0,52	+4,88	—4,36
1869	—5,26	+6,20	—0,94	—3,46	+5,52	—2,06	—3,18	+5,56	—2,38
1870	—6,91	+7,07	—0,16	—5,31	+6,40	—1,09	—4,30	+5,62	—,132
1871	—5,66	+6,40	—0,74	—5,40	+7,31	—1,91	—3,67	+5,61	—1,94
1872	—5,82	+6,51	—0,69	—4,79	+6,25	—1,46	—4,79	+6,66	—1,87
1873	—4,66	+5,77	—1,11	—3,17	+5,91	—2,74	—3,33	+5,04	—1,71
1874	—4,35	+5,52	—1,17	—4,02	+4,56	—0,54	—3,21	+5,02	—1,81
moyenne.	—4,63	+5,75	—1,12	—3,85	+5,78	—1,93	—2,58	+4,94	—2,37
valeurs normales.	—4,79	+5,85	—1,06	—4,06	+6,02	—1,96	—2,89	+5,25	—2,36

TABLEAU I.

Variation diurne de la déclinaison.

	OCTOBRE.			NOVEMBRE.			DÉCEMBRE.		
	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8	Δ 20	Δ 2	Δ 8
1855	—2,14	+4,49	—2,35	—1,27	+3,12	—1,85	+0,29	+0,82	—1,12
1856	—2,01	+5,08	—3,07	—1,01	+2,49	—1,48	+0,36	+2,20	—2,56
1857	—2,69	+5,14	—2,45	—0,06	+4,43	—4,37	—1,27	+3,14	—1,87
1858	—5,00	+7,68	—2,68	—1,86	+4,10	—2,24	—1,59	+3,51	—1,92
1859	—4,42	+6,88	—2,46	—2,72	+4,53	—1,81	—2,24	+3,99	—1,75
1860	—4,49	+6,55	—2,06	—1,94	+4,25	—2,31	0,67	+2,84	—2,17
1861	—2,97	+5,60	—2,63	—1,43	+4,19	—2,76	—1,16	+3,38	—2,22
1862	—1,44	+5,88	—4,44	—0,68	+5,18	—4,50	+0,77	+3,80	—4,57
1863	—1,97	+4,92	—2,95	+0,04	+3,84	—3,88	+0,97	+2,42	—3,39
1864	—0,78	+3,04	—2,26	+0,60	+2,48	—3,08	+0,65	+0,61	—1,26
1865	—0,18	+5,43	—5,25	+1,31	+2,72	—4,03	—0,32	+1,98	—1,66
moyenne .	—2,55	+5,52	—2,96	—0,82	+3,76	—2,94	—0,38	+2,61	—2,23
1864	—0,78	+3,04	—2,26	+0,60	+2,48	—3,08	+0,65	+0,61	—1,26
1865	—0,18	+5,43	—5,25	+1,31	+2,72	—4,03	—0,32	+1,98	—1,66
1866	—0,13	+4,52	—4,39	—0,14	+3,24	—3,10	+0,41	+2,56	—2,97
1867	+0,24	+3,63	—3,87	+0,17	+1,73	—1,90	+0,09	+1,74	—1,82
1868	—0,69	+4,62	—3,93	—0,65	+3,24	—2,59	—0,76	+3,30	—2,54
1869	—2,23	+5,11	—2,88	—1,32	+3,61	—2,29	—0,11	+2,05	—1,94
1870	—4,45	+6,45	—2,00	—3,06	+5,00	—1,94	—1,48	+4,25	—2,77
1871	—3,49	+5,99	—2,50	—1,22	+4,91	—3,69	—1,02	+3,47	—2,45
1872	—3,24	+5,13	—1,89	+0,86	+3,60	—4,46	—0,35	+2,61	—2,26
1873	—1,87	+4,38	—2,51	—1,14	+3,22	—2,08	—0,81	+2,63	—1,82
1874	—2,93	+5,12	—2,19	—0,51	+2,72	—2,21	+0,18	+1,66	—1,84
moyenne .	—1,80	+4,86	—3,06	—0,46	+3,31	—2,85	—0,32	+2,44	—2,12
valeurs normales.	—2,34	+5,28	—2,94	—0,80	+3,63	—2,83	—0,40	+2,65	—2,25

A raison de la période supposée de 10 ou 11 ans, j'ai cru devoir former, avec les vingt années dont je disposais, deux groupes, chacun de onze années, et cela d'autant plus que les deux années 1864 et 1865, comme le tableau le montre immédiatement, sont très anormales. Aucun accord ne pourrait être attendu entre les valeurs normales des deux groupes, si l'année 1865 ne figurait que dans un seul d'entre eux.

Si l'on considère que la valeur d'une division de l'échelle est de 50 secondes, on reconnaîtra que le tableau I indique entre les moyennes des deux groupes un accord aussi satisfaisant que possible, et que par conséquent le nom de valeurs normales peut être donné de plein droit aux moyennes des vingt années.

Pour trouver maintenant quels résultats se laissent déduire des nombres obtenus, il est nécessaire de comparer ceux-ci avec les résultats d'observations horaires faites en un autre lieu. Nous choisirons pour cela des observations de variation recueillies à St. Pétersbourg et discutées avec beaucoup de soin par M. J. Mielberg [1]).

A priori, il eût naturellement été préférable de choisir une localité ayant avec le Helder, sous le rapport magnétique, plus d'homogénéité que St-Pétersbourg; mais, ni de Kew, ni de Paris, je n'ai pu me procurer les observations. Le résultat a prouvé du reste que, pour le but en question, à savoir l'étude de la déviation diurne, St-Pétersbourg convenait parfaitement. Comme les observations relatives à ce lieu ne s'étendent que sur les années 1841—1862, il a été impossible de faire certaines comparaisons de détail, qui auraient offert de l'intérêt; c'est ainsi, par exemple, qu'il eût été utile de pouvoir comparer avec St-Pétersbourg les nombres tout à fait anormaux du mois de mai 1865. En l'absence de ce contrôle, la possibilité subsiste qu'une erreur ait été commise en ce mois, que, par exemple, les observations de l'après-midi aient été confondues avec celles du matin.

Au premier aspect des courbes de déclinaison données pour

[1]) J. Mielberg, *Die magnetische Declination in St. Pétersbourg*, *Repertorium für Meteorologie*, Bd. IV, Heft 1.

chaque mois par M. Mielberg, on reconnaît qu'elles se laissent partager en deux groupes:

1°. Les mois d'octobre jusqu'à mars inclusivement.

2°. Les mois d'avril jusqu'à septembre inclusivement.

La déviation diurne est caractérisée dans tous les mois par *un* maximum et *un* minimum fortement accusés; mais les mois d'hiver se distinguent du second groupe par une amplitude beaucoup moindre et par la présence d'un second maximum et d'un second minimum, qui restent toutefois petits en comparaison des premiers.

Le grand maximum tombe en janvier et février à 2^h après midi, se déplace en mars et avril de quelques minutes à gauche (plus tôt), arrive en mai à une heure et demie, puis se rapproche de nouveau un peu de deux heures en juin et juillet. En août il tombe à 1^h—15^m, en septembre à 1^h—10^m; ensuite il revient d'une manière continue à 2 heures, où le maximum arrive en décembre.

Ce mouvement en temps du maximum ne peut jamais, bien entendu, être décelé par les observations du Helder; la correction en grandeur, qui devrait être appliquée de ce chef à l'observation de 2 heures, pour obtenir le maximum véritable, est d'ailleurs insignifiante.

Ainsi qu'il a déjà été dit, il y a en janvier deux minima: le grand tombe environ à 10 heures du soir, le petit à 9^h—30^m du matin. Ce petit minimum du matin croît en février, tout en restant moindre que le minimum du soir; en mars il a déjà atteint la même grandeur. Après le mois de mars il continue à se développer, tandis que le minimum du soir devient plus petit, puis disparaît. Ce développement est accompagné d'un déplacement en temps, qui se fait dans le même sens que celui du maximum.

En septembre apparaît de nouveau, comme en mars, un minimum du soir, égal en grandeur au minimum du matin; dans les mois suivants, le premier croît à son tour, tandis que le second s'efface peu à peu, en se déplaçant de nouveau vers la

droite. Les deux minima se compensent donc en quelque sorte et changent de rôle dans les mois des équinoxes.

Les *maxima* secondaires, petits dans les mois d'hiver, sont rudimentaires dans les mois d'été: en mai il n'y en a pas de trace perceptible.

Comme on le voit, cette description des résultats russes est applicable, sous presque tous les rapports, aux observations du Helder.

Le maximum de l'amplitude en avril n'est pas caractéristique pour le Helder, mais se rencontre aussi tant à St-Pétersbourg qu'à Kew [1]).

Partant de la conformité des valeurs normales à St-Pétersbourg et au Helder, on est maintenant autorisé à instituer une comparaison ultérieure, qui permettra de corriger les nombres donnés dans le tableau I.

Ces nombres ont été obtenus dans la supposition que la moyenne des trois positions indiquait la *position* du jour; en d'autres termes, la somme des minima a été prise égale au maximum. En réalité, pourtant, le maximum est toujours plus grand que cette somme, de sorte que la ligne de déviation nulle est placée trop haut par la supposition dont il s'agit; il faut donc appliquer une correction, qui rende plus grande la déviation occidentale (+) de 2 heures, et plus petites les deux déviations orientales (—).

Pour arriver à cette correction, il était nécessaire d'examiner d'abord si le minimum du Helder tombe bien environ au même moment que celui de St-Pétersbourg, autrement dit, si les trois ordonnées déterminées au Helder sont comparables aux trois mêmes ordonnées des courbes de St-Pétersbourg ou bien à d'autres de ces ordonnées.

A cet effet, j'ai déduit des valeurs normales russes les nombres qu'on aurait obtenus si à St-Pétersbourg aussi on n'avait observé que trois fois par jour. Comme il résulte de la description donnée ci-dessus que le maximum est toujours atteint vers 2

---

[1]) Balfourt Steward, *Proceed. Royal Soc.*, t. XXVI, nº 179, 22 mars 1877.

heures, et que le minimum du matin tombe aussi toujours non loin de 20 heures, je me suis borné à calculer les combinaisons

$$20 + 2 + 7$$
$$20 + 2 + 8$$
$$20 + 2 + 9$$
$$20 + 2 + 10.$$

Si maintenant au Helder le minimum du soir tombe, par exemple, aux environs de 8 heures, les différences des valeurs normales Helder moins St-Pétersbourg seront le plus petites pour la dernière des combinaisons susdites, parce que, dans ce cas, l'ordonnée 8 heures Helder correspond à 10 heures St-Pétersbourg. La somme des différences est toutefois le plus petite pour la seconde combinaison, d'où il suit:

1°. qu'au Helder aussi le minimum du soir tombe environ à 10 heures;

2°. que les corrections pour la combinaison 20 + 2 + 8, déduites pour St-Pétersbourg d'observations horaires, peuvent être appliquées, *comme seconde approximation*, aux valeurs normales du Helder.

Ces corrections sont, pour les différents mois:

janvier	— 0',54	juillet	— 0',71
février	— 0,90	août	— 0,70
mars	— 0,72	septembre	— 0,67
avril	— 0,70	octobre	— 0,60
mai	— 0,67	novembre	— 0,50
juin	— 0,71	décembre	— 0,52.

Dans le tableau II les valeurs normales ainsi obtenues sont placées en regard des valeurs primitives et réduites en minutes d'arc.

TABLEAU II.

	Non corrigé.				Corrigé.		
	20	2	8		20	2	8
Janvier	—0′,75	+2′,66	—1′,91	Janvier	—0′,21	+3′,20	—1,37
Février	—1,74	+3,78	—2,04	Février	—0,84	+4,68	—1,14
Mars	—3,07	+5,23	—2,17	Mars	—2,35	+5,95	—1,45
Avril	—3,96	+5,83	—1,87	Avril	—3,26	+6,53	—1,17
Mai	—3,55	+4,53	—0,98	Mai	—2,88	+5,20	—0,31
Juin	—4,07	+4,96	—0,89	Juin	—3,36	+5,67	—0,18
Juillet	—3,99	+4,88	—0,88	Juillet	—3,28	+5,59	—0,17
Août	—3,38	+5,02	—1,63	Août	—2,68	+5,72	—0,93
Septembre	—2,15	+4,38	—1,97	Septembre	—1,48	+5,05	—1,30
Octobre	—1,95	+4,40	—2,45	Octobre	—1,35	+5,00	—1,85
Novembre	—0,67	+3,03	—2,36	Novembre	—0,17	+3,53	—1,86
Décembre	—0,33	+2,21	—1,88	Décembre	+0,19	+2,73	—1,36

On voit qu'aucune différence capitale n'est introduite par l'application de cette correction. Le maximum d'avril et d'août pour 2 heures subsiste toujours.

---

2. Période annuelle de la déviation diurne.

Comme on le sait, la déviation de la déclinaison suit dans l'hémisphère sud une marche opposée à celle qu'elle affecte dans l'hémisphère nord, de sorte que le maximum de déviation *orientale* s'y observe vers 2 heures après midi. Arago en avait conclu, un peu hâtivement, qu'il devait exister une série de lieux sans déviation journalière, susceptibles d'être réunis par une ligne. On a trouvé toutefois que la vraie solution est autre, à savoir, qu'il y a des points où la marche diurne est pendant une moitié de

l'année semblable à celle de l'hémisphère nord, et pendant l'autre moitié semblable à celle de l'hémisphère sud.

Ce fait a été constaté pour la première fois à St.-Hélène, par M. Sabine, qui a reconnu de plus que le renversement du phénomène avait lieu en même temps que le changement de signe de la déclinaison du soleil. Cette période une fois découverte là où elle est le mieux accusée, on l'a retrouvée sans peine dans les observations de toutes les stations: naturellement, avec une diminution graduelle en amplitude à mesure qu'on approche des pôles. Tandis que dans les lieux situés sur l'équateur magnétique, ou près de cette ligne, la marche septentrionale alterne avec la marche méridionale (comme à St.-Hélène), dans les stations à une latitude plus élevée la variation diurne conserve son caractère, mais une période semblable à celle de St.Hélène, quoique moins prononcée, se superpose en quelque sorte à la variation ordinaire. En partant de l'hypothèse que la déclinaison solaire est, directement ou indirectement, la cause du phénomène, on présente ordinairement les résultats sous la forme suivante:

	Le Helder.	
	Avril—Sept.	Oct.—Mars.
20	— 2,82	— 0,79
2	+ 5,63	+ 4,18
8	— 0,68	— 1,51
	Kew.	
20	— 5,20	— 2,40
2	+ 9,94	+ 4,67
8	— 0,44	— 0,92.

Il ressort de ce tableau que, tant au Helder qu'à Kew, la déviation à 20 h. est, pendant la période de déclinaison australe du soleil, moins orientale, donc *occidentale* par rapport à celle de la période positive; à 2 h. la déviation est *orientale* (moins à l'est), et à 8 h. elle est pareillement *orientale*.

Ce contraste des deux périodes semi-annuelles est toutefois mieux mis en évidence quand on range les moyennes mensuelles

en deux groupes, de sorte que deux mois séparés par un intervalle d'une demi-année soient toujours placés vis-à-vis l'un de l'autre. S'il existe une période, on doit pouvoir obtenir ainsi des différences toutes positives et qui en outre présenteront une marche déterminée, attendu que de cette manière les deux phases inverses de la période sont juxtaposées.

En traitant ainsi nos valeurs normales, on trouve que, pour celles de 2 heures, on ne peut former d'autres groupes de six mois donnant chacun une différence positive que les suivants:

mars	5′,95	septembre	5′,05	+ 0′,90
avril	6 ,53	octobre	5 ,00	+ 1 ,53
mai	5 ,20	novembre	3 ,53	+ 1 ,67
juin	5 ,67	décembre	2 ,73	+ 2 ,94
juillet	5 ,59	janvier	3 ,20	+ 2 ,39
août	5 ,72	février	4 ,68	+ 1 ,04.

La période de la marche diurne s'accuse nettement de cette façon. Si nous attribuons aux deux moitiés de la période une part égale dans les différences, la période elle-même peut être représentée comme il suit:

	Ouest.		Est.
mars	+ 0′,45	septembre	— 0′,45
avril	0 ,77	octobre	0 ,77
mai	0,84	novembre	0 ,84
juin	1,47	décembre	1 ,47
juillet	1,20	janvier	1 ,20
août	0,52	février	0 ,52.

Les valeurs normales relatives à l'heure du matin donnent de la même manière:

	Est.		Ouest.
mars	— 0′,44	septembre	— 0′,44
avril	0 ,96	octobre	0 ,96
mai	1 ,36	novembre	1 ,36
juin	1 ,78	décembre	1 ,78
juillet	1 ,54	janvier	1 ,54
août	0 ,92	février	0 ,92.

Pour la déviation diurne à 8 heures du soir il n'existe pas, comme pour les deux autres heures, une opposition de signe. Ceci est entièrement d'accord avec les faits observés à St.-Hélène, la station type sous ce rapport. Là aussi, le mouvement du soir est dirigé à l'est *dans les deux périodes semi-annuelles.*

Mais ce qui frappe dans ce mode de détermination de la période, c'est que le mois de mars appartient manifestement à la période qui correspond à la déclinaison positive du soleil, et le mois de septembre à celle de déclinaison négative. Ce fait imprévu, qui est entièrement dissimulé par les moyennes ordinairement données, avril—septembre et octobre—mars, ne saurait être regardé comme accidentel, attendu qu'il se produit aussi bien à 2 h. qu'à 20 h., et qu'il repose sur une série de vingt années de bonnes observations. On est donc autorisé à l'examiner de plus près, d'autant plus que la période en question est peut-être la plus importante de toutes celles du magnétisme terrestre.

Le phénomène du déplacement de l'équateur magnétique avec le soleil, et de la déviation diurne opposée dans les deux hémisphères, est si parfaitement analogue au phénomène de l'ascension de l'air échauffé entre les tropiques et de la déviation des alizés supérieurs par la rotation de la terre, qu'il y a tout lieu de s'attendre à ce qu'une hypothèse concernant le magnétisme terrestre, qui prendra ces phénomènes pour base, fera faire un pas à la solution du problème. Aussi est-ce sur une hypothèse de ce genre, dans laquelle la déclinaison du soleil est considérée comme la cause déterminante du déplacement de l'équateur magnétique, que M. Zöllner a fondé la théorie qu'il a essayé de construire.

Pour décider maintenant jusqu'à quel point les mois de mars et de septembre sont par leurs valeurs normales en contradiction avec une hypothèse si naturelle, j'ai cherché les déviations diurnes normales qui résultent, pour chaque jour de ces mois, de nos vingt années d'observations.

A cet effet, on a pris les sommes de toutes les différences 2—20 et 2—8 pour le 1er mars, pour le 2, etc., et de même

pour le mois de septembre. Au moyen de ces deux différences normales, les écarts par rapport à la position moyenne ont ensuite été calculés comme précédemment, par les formules

$$\frac{-2f+f'}{3}, \quad \frac{f+f'}{3}, \quad \frac{-2f'+f}{3}.$$

En disposant alors, comme il a été fait ci-dessus pour les mois, les jours correspondants de mars et de septembre en regard l'un de l'autre, on pourra reconnaître si réellement le passage d'une phase à l'autre a lieu vers l'époque de l'équinoxe.

Dans les tableaux III et IV, on a placé derrière les colonnes des déviations normales deux petites colonnes, dans lesquelles un petit trait indique la manière dont le mois de mars se comporte par rapport au mois de septembre.

TABLEAU III.

Déviations orientales à 20 h., en parties de l'échelle.

Date.	Mars.	Sept.	Est.	Ouest.	Date.	Mars.	Sept.	Est.	Ouest.
1	2,39	3,64		—	16	3,69	2,12	—	
2	1,75	3,90		—	17	3,59	2,09	—	
3	2,90	1,66	—		18	4,39	2,60	—	
4	2,95	3,99		—	19	4,25	2,53	—	
5	2,94	4,08		—	20	4,14	1,24	—	
6	2,23	3,60		—	21	4,43	2,10	—	
7	2,41	3,00		—	22	4,37	2,73	—	
8	3,05	2,32	—		23	4,33	2,87	—	
9	2,69	2,55	—		24	4,65	4,11	—	
10	3,48	2,72	—		25	4,29	3,52	—	
11	2,94	3,46		—	26	5,15	2,34	—	
12	2,50	2,20	—		27	4,08	2,88	—	
13	3,13	3,31		—	28	5,07	2,96	—	
14	3,93	2,94	—		29	5,31	2,36	—	
15	4,23	3,35			30	3,77	2,99	—	

TABLEAU IV.

Déviations occidentales à 2 h., en parties de l'échelle.

Date.	Mars.	Sept.	Est.	Ouest.	Date.	Mars.	Sept.	Est.	Ouest.
1	4,09	6,35	—		16	6,40	4,04		—
2	5,26	5,78	—		17	7,09	5,45		—
3	5,26	4,96		—	18	7,46	4,97		—
4	4,88	5,52	—		19	6,55	5,30		—
5	5,71	6,06	—		20	6,91	4,64		—
6	4,93	4,94	—		21	7,06	5,87		—
7	5,22	7,11		—	22	8,71	4,98		—
8	5,86	4,37		—	23	6,16	5,29		—
9	6,49	5,88		—	24	7,06	6,48		—
10	5,40	4,19		—	25	7,10	5,84		—
11	6,02	5,56		—	26	7,09	4,98		—
12	6,95	4,70		—	27	8,08	4,94		—
13	5,41	4,61		—	28	7,95	5,37		—
14	5,86	4,90		—	29	7,44	4,43		—
15	6,39	5,71		—	30	6,45	5,32		—

Tandis que, d'après la théorie, mars devrait être, dans le tableau III, jusqu'à la date du 23 *à l'ouest* de septembre (moins à l'est), on voit que mars ne se comporte que jusqu'au 8 comme un mois de déclinaison solaire australe.

Le tableau IV donne un résultat tout pareil. Le mois de mars ne s'y comporte que jusqu'au 7 conformément à la théorie.

Ce résultat est défavorable à l'hypothèse de M. Zöllner, car il est difficile d'admettre que l'effet puisse précéder de quinze jours la cause. Pourtant, une hypothèse analogue à celle de Zöllner se présente si naturellement, que nous devons exprimer, comme conclusion du présent chapitre, le désir qu'un examen, semblable à celui auquel nous venons de nous livrer, soit fait pour d'autres stations où l'on dispose d'une longue série d'observations.

Ce chapitre montre en outre, par un exemple, que des obser-

vations peu nombreuses, mais s'étendant sur une assez longue suite d'années, peuvent quelquefois avoir plus de valeur que des observations horaires portant sur une période plus courte.

---

3. Variation séculaire de la déviation diurne.

S'il est vrai qu'on a quelquefois admis trop légèrement l'influence de certains éléments cosmiques sur les phénomènes météorologiques, les longues recherches de M. le professeur Wolf ont rendu si probable la connexion entre les taches solaires et la variation diurne de l'aiguille aimantée, qu'un scepticisme prévenu pourrait seul dénier toute valeur à ces résultats.

Le tableau V donne un aperçu des relations observées entre ces deux phénomènes au Helder (voir à la page suivante).

Pour éliminer la période annuelle de la variation diurne, M. Bergsma, dans le tome 1er de ses Observations de Batavia, publié en 1871, a combiné, pour chaque succession de douze mois, les moyennes mensuelles relatives à chaque heure. Ce même traitement a ensuite été appliqué par M. Wolf à ses nombres relatifs des taches solaires pour les années 1866—1871.

On obtient ainsi 12 ordonnées pour chaque année, indépendantes de la période annuelle.

Pendant la durée des observations de Batavia (1866—1869), il ne s'est produit qu'un seul minimum, mais celui-ci tombe exactement au même point dans les deux séries parallèles.

C'est de cette manière que j'ai calculé, au moyen du tableau I, les nombres qui figurent dans les colonnes Δ 20 et Δ 2 du tableau V.

Partant de la valeur moyenne pour l'année entière 1855 (donc, de l'époque 1 juillet 1855), j'y ai chaque fois ajouté un mois suivant et retranché le premier mois. Comme toutes ces sommes devaient être divisées par 12, j'ai, par la même occasion,

TABLEAU V.

Variation séculaire de la déviation diurne.

	Δ20	Δ2		Δ20	Δ2		Δ20	Δ2
	′	′						
1 juill. 1855	2,05	3,64	1 juill. 1858	3,07	4,85	1 juill. 1861	3,22	5,16
	1,99	3,56		3,04	4,86		3,25	5,03
	2,01	3,54		3,15	4,87		3,12	4,93
	1,99	3,51		3,26	4,82		3,10	4,75
	2,00	3,44		3,43	4,91		2,88	4,61
	2,02	3,39		3,42	4,92		2,72	4,45
	2,11	3,43		3,55	4,98		2,70	4,44
	2,13	3,41		3,58	5,03		2,69	4,47
minimum.	2,13	3,38		3,64	5,10		2,61	4,40
	2,14	3,43		3,66	5,17		2,54	4,34
	2,14	3,47		3,62	5,11		2,43	4,36
	2,12	3,43		3,68	5,14		2,38	4,42
1 juill. 1856	2,11	3,52	1 juill. 1859	3,72	5,18	1 juill. 1862	2,25	4,45
	2,15	3,56		3,78	5,20		2,24	4,52
	2,46	3,59		3,74	5,24		2,30	4,52
	2,43	3,57		3,82	5,38		2,25	4,56
	2,17	3,57		3,71	5,29		2,31	4,58
	2,23	3,64		3,76	5,29		2,38	4,71
	2,22	3,61		3,85	5,38		2,35	4,65
	2,22	3,63		3,93	5,40		2,33	4,63
	2,18	3,61	*maximum.*	3,96	5,39		2,38	4,65
	2,07	3,54		3,94	5,29		2,37	4,58
	2,12	3,55		3,95	5,27		2,41	4,51
	2,05	3,68		3,89	5,25		2,36	4,41
1 juill. 1857	2,17	3,75	1 juill. 1860	3,78	5,17	1 juill. 1863	2,34	4,32
	2,26	3,82		3,64	5,23		2,33	4,30
	2,25	3,90		3,64	5,23		2,32	4,23
	2,29	4,10		3,55	5,13		2,36	4,27
	2,38	4,24		3,63	5,26		2,25	4,23
	2,43	4,27		3,65	5,31		2,19	4,15
	2,35	4,28		3,61	5,29		2,12	4,10
	2,41	4,39		3,50	5,20		2,10	4,08
	2,51	4,43		3,42	5,18		2,16	4,10
	2,76	4,67		3,32	5,19		2,15	4,03
	2,92	4,85		3,22	5,12		2,07	3,90
	3,04	4,83		3,18	5,12		2,03	3,81

TABLEAU V.

Variation séculaire de la déviation diurne.

	Δ20	Δ2	R		Δ20	Δ2	R
1 juill. 1864	2,05	3,68		1 juill. 1867	1,32	3,25	7,3
	1,95	3,54			1,37	3,25	8,6
	1,82	3,51			1,38	3,23	9,8
	1,78	3,53			1,46	3,24	11,3
	1,69	3,35			1,54	3,32	13,9
	1,17	2,88			1,55	3,33	15,9
	0,87	2,67			1,55	3,35	18,3
	0,75	2,56			1,50	3,40	20,3
	0,62	2,52			1,61	3,45	22,8
	0,56	2,57			1,56	3,48	25,6
	0,52	2,73			1,63	3,55	29,6
	0,47	2,75			1,69	3,65	33,8
1 juill. 1865	0,54	2,85		1 juill. 1868	1,74	3,76	37,3
	0,64	2,93			1,72	3,87	41,1
	0,77	3,03			1,72	3,92	44,7
	0,61	2,94			1,69	3,98	46,9
	0,69	3,09			1,68	4,06	47,2
	1,11	3,49			1,77	4,12	53,7
	1,38	3,70	23,5		1,90	4,25	60,1
	1,44	3,74	22,1		2,02	4,28	62,7
	1,41	3,65	20,0		2,03	4,28	66,4
	1,36	3,62	18,8		2,22	4,33	69,5
	1,36	3,56	18,5		2,32	4,36	69,3
	1,46	3,60	17,2		2,37	4,39	70,8
1 juill. 1866	1,41	3,64	16,3	1 juill. 1869	2,33	4,30	73,9
	1,38	3,59	13,7		2,37	4,24	75,3
	1,33	3,57	10,5		2,46	4,25	79,9
	1,40	3,60	9,2		2,62	4,34	88,8
	1,43	3,58	8,2		2,76	4,32	98,7
	1,36	3,48	7,4		2,98	4,52	104,7
	1,35	3,42	6,1		3,08	4,52	107,0
	1,38	3,43	5,8		3,20	4,58	113,1
minimum	1,32	3,43	5,1		3,32	4,64	119,3
	1,35	3,48	5,3		3,40	4,65	123,9
	1,32	3,41	5,3		3,56	4,74	131,1
	1,30	3,31	5,3		3,68	4,84	137,0

TABLEAU V.

Variation séculaire de la déviation diurne.

	Δ20	Δ2	R		Δ20	Δ2	R
1 juill. 1870	3,77	4,99	139,1	1 juill. 1873	2,26	4,22	66,3
	3,84	5,06	140,0		2,32	4,12	64,1
maximum	3,87	5,16	**140,9**		2,34	4,10	60,6
	3,98	5,08	139,5		2,33	4,07	56,2
	3,99	5,14	139,7		2,25	4,00	52,6
	3,87	5,02	137,2		2,29	3,99	52,3
	3,92	5,08	133,5		2,43	3,85	51,7
	3,84	5,03	131,1		2,41	3,83	51,8
	3,84	5,10	127,4		2,46	3,74	51,2
	3,80	5,10	122,8		2,46	3,73	49,6
	3,73	5,06	118,0		2,53	3,79	48,5
	3,60	5,06	114,5		2,49	3,75	46,3
1 juill. 1871	3,57	5,00	111,2	1 juill. 1874	2,42	3,68	44,7
	3,58	5,08	110,5				
	3,55	4,93	110,0				
	3,36	4,93	105,5				
	3,30	4,92	100,4				
	3,28	4,93	97,3				
	3,15	4,93	98,8				
	3,16	4,93	98,9				
	3,12	4,86	97,2				
	3,19	4,93	99,8				
	3,18	4,87	101,4				
	3,03	4,78	102,0				
1 juill. 1872	2,99	4,72	101,7				
	2,82	4,73	102,3				
	2,76	4,76	101,2				
	2,72	4,71	102,0				
	2,74	4,63	99,8				
	2,66	4,59	94,9				
	2,62	4,49	89,4				
	2,40	4,44	86,2				
	2,29	4,41	82,2				
	2,19	4,30	78,6				
	2,09	4,25	73,9				
	2,23	4,22	69,2				

réduit en minutes les parties de l'échelle. De la manière dont a été obtenu le tableau I, il suit que $\Delta 8$ est toujours égal à $\Delta 2 - \Delta 20$, raison pour laquelle je me suis abstenu de donner $\Delta 8$.

A compter du 1er janvier 1866, j'ai ajouté dans la troisième colonne, marquée R, les nombres relatifs des taches solaires, tels que M. Wolf les a donnés pour 1866—1871 dans le *Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 18e année, 2e cahier, 1873. Pour les années postérieures à 1871, j'ai calculé les nombres relatifs en suivant la méthode de M. Wolf.

On voit, dans le tableau, qu'il existe un accord parfait entre les deux phénomènes [1]). Chacun d'eux présente

un minimum en 1867. 2
un maximum „ 1870. 8.

Les variations diurnes seules déterminent

un minimum en 1856. 2
un maximum „ 1860. 2.

Dans le *Vierteljahrschrift* de 1868, M. Wolf donne un tableau de toutes les époques maxima et minima des taches solaires: on y retrouve exactement les deux époques ci-dessus.

La durée des périodes est donc,

déduite des minima, ... 11,0 années.
„ „ maxima, ... 10,5 „

Dans un des *Comptes rendus* de l'année dernière [2]), M. Faye a combattu non-seulement la période, aujourd'hui partout cherchée et partout reconnue, des taches solaires, mais aussi l'existence de cette période dans la variation diurne; il se fonde principalement sur le fait que M. Wolf fixe la durée moyenne de la période des taches à 11,11 années, tandis que M. Lamont et M. Broun trouvent respectivement, par les observations magnétiques, 10,43 et 10,45. Les observations du Helder sont propres

---

[1]) Le minimum de 1865 est dû à la valeur anormale de mai 1865, laquelle, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, tient probablement à une confusion de chiffres. Cette probabilité est augmentée par la recherche actuelle.

[2]) *C. R.*, 1877, t. LXXXV, n°. 5. (Comparez aussi *C. R*, mai 1878).

à montrer l'insuffisance de cet argument. Les périodes, en effet, sont toutes inégales. Tandis que les deux époques trouvées au Helder diffèrent entre elles d'une demi-année, le tableau des époques publié par M. Wolf, et cité ci-dessus, offre des périodes de 8,5 et de 15,5 années. La comparaison des durées moyennes des périodes n'est donc légitime que si ces moyennes sont tirées d'un même nombre de périodes. Or, les bonnes observations de déclinaison étant d'une date beaucoup plus récente que les observations utilisables des taches solaires, il n'est pas encore possible de satisfaire à la condition susdite, qui certainement n'est pas remplie pour les deux nombres rapportés par M. Faye.

Même abstraction faite de cette remarque, l'insuffisance de l'argument de M. Faye ressort de la considération que, si ses nombres avaient quelque valeur, l'une des périodes se déplacerait entièrement par rapport à l'autre en un laps de 11 × 11 années. Par conséquent, 60 ans après une coïncidence, un maximum se présenterait en face d'un minimum. Le nombre des observations est déjà assez grand pour prouver qu'un pareil déplacement n'a pas lieu.

---

4. Perturbations magnétiques.

Pour le calcul de la variation diurne on a pris les moyennes mensuelles telles qu'on les trouve dans les Annuaires, c'est-à-dire, non corrigées des perturbations. La mesure qui sert à définir les perturbations est très imparfaite; si l'on prend, suivant l'usage ordinaire, la déviation absolue par rapport à la moyenne, on emploie en réalité, pour les années de calme magnétique relatif, une autre mesure que pour les années riches en perturbations [1]).

[1]) Le général Sabine a adopté, pour la grandeur des déviations dues à des perturbations irrégulières, une limite arbitraire, qui ne s'est trouvée bien choisie que grâce à l'extrême sagacité de l'auteur. On trouvera une détermination plus certaine de cette limite dans les Comptes rendus des séances de la Société des arts et des sciences d'Utrecht, année 1860. (*Note de* M. Buys Ballot).

En outre, la perturbation appartient évidemment au phénomène de la variation diurne, et ne saurait en être séparée. Elle suit une marche quotidienne et est aussi assujettie à une variation séculaire; elle remplit donc par rapport au soleil un rôle identique à celui de la variation diurne. Pour commencer, par exemple, la grandeur de ce qu'on appelle perturbation devrait être prise proportionnelle à la déviation moyenne de l'année considérée.

Comme preuve, toutefois, que sous ce rapport aussi les observations du Helder concordent avec celles d'autres stations, j'ai réduit en tableau, pour 2 h. seulement, de 1855 à 1864, le nombre des fois que la position donnée s'est écartée de plus de 3 divisions scalaires de la position moyenne de chaque mois. Pendant ces 10 années, sur les 100 perturbations à 2 h., il y en a eu

58,2 à l'ouest,
41,8 à l'est.

C'est en 1860, par conséquent dans une année de maximum, que les perturbations ont été le plus nombreuses.

Pour les autres heures et les autres années, le mode de publication adopté, — qui consiste à donner les différences et qui se montre si approprié à la plupart des recherches, — ne permet pas d'appliquer immédiatement la méthode précédente, et la question ne m'a pas paru assez féconde pour valoir la peine d'un remaniement des observations.

---

5. Variation de la déclinaison absolue.

Des positions que les Annuaires donnent pour 2 h. (moyennes mensuelles), j'ai déduit, à l'aide du tableau I, l'état moyen corrigé de chaque mois. Pour cela, j'ai simplement retranché de chaque mois la quantité

$$\Delta 2 + \text{corr. St. Pétersbourg.}$$

Les valeurs ainsi obtenues se trouvent rassemblées dans le tableau VI, tandis que le tableau VII (Planche IV) donne les années 1851—1874 sous la forme graphique.

TABLEAU VI.

État moyen de la déclinaison pour chaque mois.

	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	moyennes 1858—1874
Janvier.....	52,39	62,35	57,60	72,04	62,64	60,65	49,44	51,05	43,38	70,83	60,04	52,89	44,08	32,29	20,18	8,18	66,22	57,71	49,28	39,88	53,28
Février.....	56,30	59,94	58,77	72,10	62,49	59,21	50,96	48.74	43,22	70,50	59,73	54,03	42,72	32,36	12,21	7,25	65,32	56,81	52,10	39,08	52,58
Mars.....	61,00	59,41	57,98	72,29	62,25	59,06	50,21	49,35	42,30	72,16	58,65	52,20	41,61	31,78	12,89	6,48	65,46	56,39	48,39	37,90	52,02
Avril.....	65,43	59,54	57,70	71,40	60,07	57,01	50.10	47,94	41,40	71,77	56,78	49,51	40,55	29,63	12,01	4,33	62,84	55,13	46,49	36,05	50,47
Mai.....	66,94	59,37	55,81	69,72	59,06	56,19	49,81	46,04	40,71	69,20	53,59	48,09	43,35	27,38	11,71	3,84	61,86	54,15	45,37	35,09	49,42
Juin.....	67,96	59,30	54,43	68,53	58,81	56,51	46,60	46,27	39,88	69,29	59,86	46,60	42,27	25,00	10,73	+ 67,18	60,39	52,97	43,51	35,09	48,97
Juillet.....	68,30	57,54	59,85	67,81	59,66	55,97	49,59	45,99	38,79	64,81	58,48	47,07	45,50	26,06	10,81	67,23	60,71	52,39	43,10	34,13	48,71
Août.....	68,09	58,30	73,88	66,81	61,80	56,19	49,24	44,28	37,56	62,78	56,47	46,74	40,48	23,53	9,33	67,38	59,31	51,57	42,71	32,92	47,59
Septembre...	65,39	59,96	73,64	65,58	61,26	54,77	47,84	43,14	+ 78,72	62,53	54,52	47,17	39,65	22,03	8,57	65,87	58,12	50.49	42,30	31,47	46,57
Octobre.....	61,84	57,09	72,41	63.73	61,52	54,30	47,19	44,28	77,11	63,79	54,44	46,04	40,27	21,32	7,87	66,27	58,42	50,64	41,31	32,86	46,41
Novembre...	60,63	57,97	70,99	63,78	60.59	53,62	47,12	44,36	73,65	61,06	54.05	45,36	39,83	20,15	7,74	66,34	57,62	50,67	40,65	31,99	45,66
Décembre...	62,39	57.55	71.13	63,45	60,61	52,54	49,99	43.52	72.45	61,02	53,41	45,32	33,08	21,72	8,17	66,09	58,14	50,16	40,45	30,95	45,22
				68,10	60,90	56,34	49,26	44,58	38,30	66,65	56,67	48,42	41,42	26,10	11,02	3,45	61,20	53,26	44,64	34,78	
									80,69			41,42				68,45					

Variation séculaire de l'état de la déclinaison pendant les
16 années 1 juill. 1858—1 juill. 1874 . . . . . = 140,71 parties de l'échelle = 1°57′,3,
variation annuelle moyenne . . . . . 8,79 „ „ „ = 7′,33,
variation mensuelle moyenne. . . . . 0,73 „ „ „ = 0′,61.

En 1855, comme on le reconnaît aisément, l'instrument n'avait pas encore une installation parfaite et le zéro a changé fréquemment; en 1856 aussi il y a des anomalies, et en juillet 1857 la lunette a été déplacée notablement. Après 1858 il n'y a plus eu de déplacements un peu importants, sauf là où ils étaient rendus nécessaires par le décroissement continu de la déclinaison. Avec le mois de septembre 1863 commence une nouvelle série; pour ramener les quatre derniers nombres de cette année à la première série, j'ai admis un déplacement du zéro de 42,39 parties de l'échelle. Ce nombre a été obtenu en supposant que d'août à septembre la déclinaison a diminué autant que de juillet à août. Pour faciliter la comparaison, on a inscrit, au bas de la colonne de 1863, tant la moyenne telle qu'elle aurait été si le zéro n'avait pas changé, que la moyenne correspondant à la supposition qu'au 1er janvier le zéro avait été déplacé de 42,39 parties de l'échelle. Le second changement notable se trouve en juin 1870. L'annuaire nous apprend que le zéro a alors éprouvé un déplacement de 65 parties de l'échelle. Les moyennes inscrites dans la dernière colonne verticale n'ont rapport qu'aux années 1858—1874, attendu que les trois premières années m'ont paru trop incertaines.

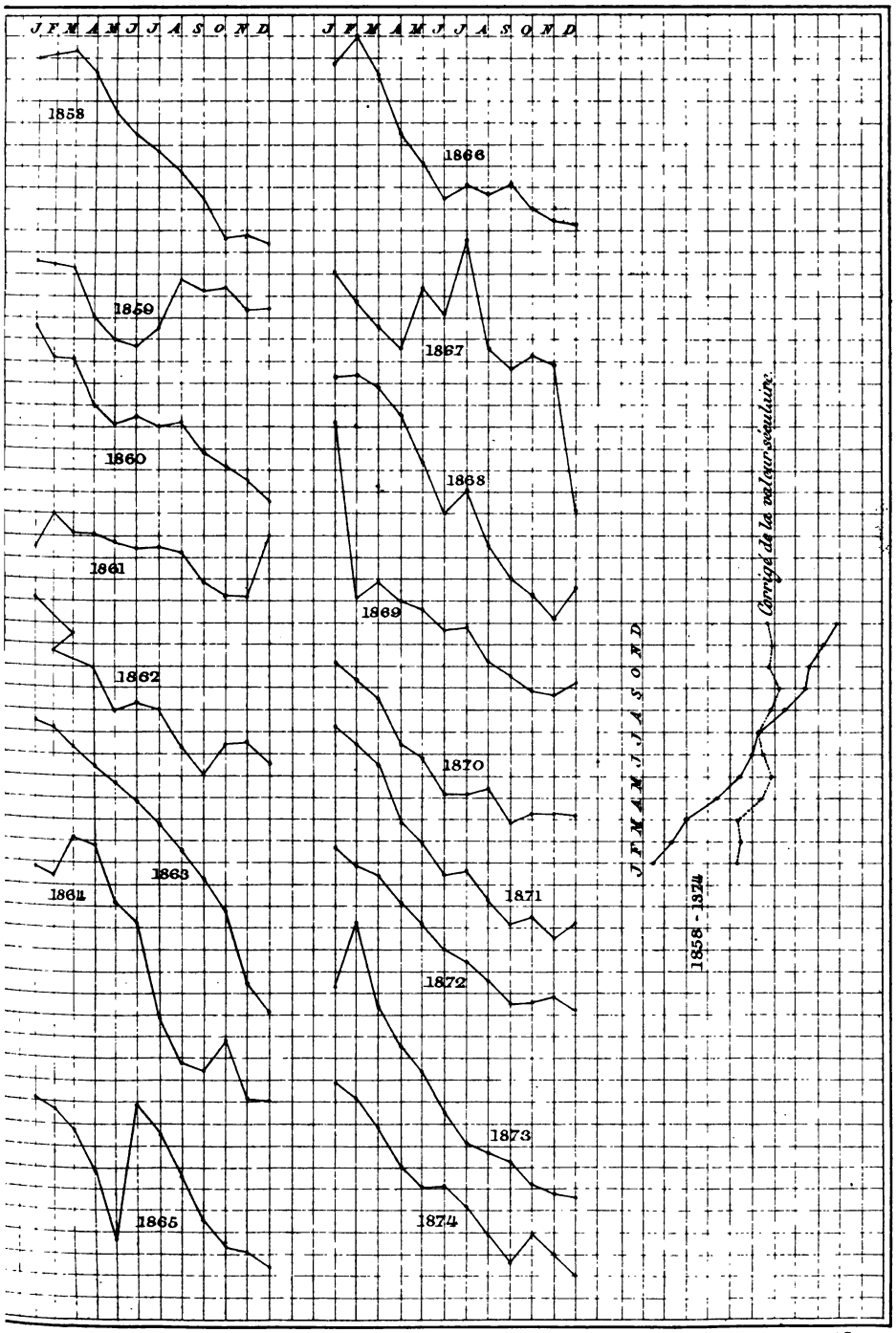
Les deux changements de zéro, dont il vient d'être question, ont été éliminés dans le tableau VII. Ce tableau montre le caractère extrêmement irrégulier de la rétrogradation séculaire de la déclinaison. Quant à savoir jusqu'à quel point les variations abruptes du milieu de 1865, de la fin de 1867, et du commencement de 1869 sont naturelles ou factices, c'est une question qui devrait être tranchée par la comparaison avec d'autres localités.

Puisque l'état de la déclinaison est une grandeur qui varie irrégulièrement, on ne peut proprement parler d'une période annuelle de la déclinaison, telle qu'on l'entend d'ordinaire. Logiquement, la question doit être posée ainsi:

Existe-t-il une période annuelle dans la rétrogradation séculaire de la déclinaison, en d'autres termes, y a-t-il une relation entre la variation séculaire et la position de la terre par rapport au soleil?

TABLEAU VII

Etat moyen de la déclinaison pour chaque mois.



Lith. Emrik & R

1 division = 1 partie de l'échelle.

Ainsi comprise, la période annuelle devient une variation du second ordre. Si la question avait toujours été posée de cette façon, on n'aurait probablement jamais cherché une période annuelle, et le peu d'accord des résultats de cette recherche (voir ci-dessus) s'explique par la nature même des choses. A priori déjà, il est improbable qu'une grandeur séculaire, qui étend sa période sur des centaines d'années, et dont on n'a jamais constaté la moindre liaison avec le soleil, soit influencée par la révolution de la terre autour de cet astre.

Or, si cette période (encore problématique) est réellement une variation du second ordre, il faut nécessairement qu'on n'en découvre aucune trace dans les années où la déclinaison reste stationnaire, puisque alors la variation du premier ordre est nulle.

Cette conclusion logique est conforme à la troisième loi déduite par Arago de recherches expérimentales. Dans les *Ann. de chimie et de physique*, Vol. XVI, cette loi est formulée de la manière suivante:

Lorsque la déclinaison a atteint son maximum, la variation annuelle disparaît.

Mais si la variation du second ordre existe, la seule méthode d'examen possible est d'admettre que les irrégularités dans le décroissement séculaire de la déclinaison sont accidentelles, en ce sens qu'on peut les supposer éliminées dans les moyennes *d'un grand nombre d'années.* Cette dernière condition est toutefois essentielle; le tableau VII montre clairement que des périodes annuelles déduites d'un petit nombre d'années, telles qu'on en donne souvent, n'ont absolument aucune valeur.

Dans les tableaux VIII et IX, j'ai réuni toutes les indications que j'ai pu me procurer concernant la variation annuelle. On a obtenu la marche pour le Helder en réduisant les nombres de la dernière colonne du tableau VI à l'époque juillet, au moyen du nombre $0^s,73$ donné, au bas de ce tableau, pour le décroissement séculaire mensuel.

TABLEAU VIII.

Période annuelle de la déclinaison. Hémisphère nord.

	Le Helder.	Kew.	Toronto I.	Toronto II.	Pékin.	Barnoul.	Nertschinsk.	Jekatérin-bourg.	St. Pétersbourg.	Dublin.	Greenwich.	Prague.	Münich.	Makers-toun.	Nombre de fois. +	Nombre de fois. —
Janvier.....	+0′,28	+0′,04	+0′,07	−0′,74	−1′,71	+0′,14	−0′,05	−0′,08	−0′,38	−0′,37	−1′,05	−0′,14	−0′,09		4	10
Février.....	+0,29	+0,57	+0,01	−0,13	−1,94	−0,15	−0,35	−0,87	−0,76	−1,60	−0,82	−0,83	−0,07		3	11
Mars.....	+0,46	+0,50	−0,13	+0,15	−1,15	−0,40	+0,08	−0,73	−0,38	−1,74	−0,65	−0,58	+0,33		5	9
Avril.....	−0,23	+0,03	−0,01	+0,50	−0,09	−0,30	+0,23	+0,19	+0,15	+1,86	−0,84	−0,61	+0,13	−max	6	8
Mai.....	−0,49	−0,70	−0,16	+0,43	+1,10	−0,40	+0,12	+1,03	+0,68	−1,33	−0,73	+0,26	+0,10		7	7
Juin.....	−0,26	−0,84	−0,29	+0,12	+1,63	+0,53	+0,17	+1,80	+0,40	−0,04	−0,13	+0,73	+0,13		8	6
Juillet.....	+0,13	−1,17	−0,71	−0,12	+2,45	+0,03	−0,29	+1,34	+0,10	+1,25	+0,59	+1,06	+0,13		10	4
Août.....	−0,18	−0,35	−0,07	0,00	+2,26	−0,30	−0,25	+0,60	−0,05	+2,17	+0,81	+1,17	+0,15		7	6
Septembre..	−0,43	+0,02	+0,79	+0,56	+2,02	+0,11	+0,17	−1,34	+0,18	+2,07	+1,20	+0,90	−0,31	+max	11	3
Octobre.....	+0,06	+0,83	+1,02	+0,02	+0,62	+0,26	+0,12	−1,03	+0,11	+1,35	+0,51	−0,49	−0,28		11	3
Novembre..	+0,04	+0,58	+0,41	−0,03	−2,98	−0,26	−0,18	−0,45	+0,47	+0,32	+0,79	−0,79	−0,07		7	7
Décembre...	+0,28	+0,66	+0,31	−0,82	−2,02	+0,25	+0,17	−0,42	−0,52	−0,22	+0,27	−0,69	−0,10		7	7
	1858 1874	1858 1862	1845 1851	1845 1847		1842 1862	1842 1862	1841 1862	1841 1862	1842 1850				1841 1845		

TABLEAU IX.

Période annuelle de la déclinaison. Hémisphère sud.

	Ste Hélène.	Cap de Bonne-Espérance.	Trévandrum.		Bombay.	Hobarton.	Batavia.	Nombre de fois. +	Nombre de fois. —
Janvier	—0,05	+0′,49	+0′,05	+0′,12	+0′,19	+0′,55	—0′,19	5	2
Février	+0,30	+0,72	+0,04	+0,04	+0,13	+0,13	+0,67	7	0
Mars	+0,17	+0,83	—0,02	—0,08	—0,19	+0,28	+0,75	4	3
Avril	—0,04	+1,07	+0,11	+0,02	—0,35	—0,37	+1,02	4	3
Mai	—0,02	—0,18	+0,15	+0,06	+0,08	—0,48	+0,59	4	3
Juin	—0,23	—1,04	+0,15	+0,09	+0,05	—0,40	+0,01	4	3
Juillet	+0,14	—0,97	+0,04	+0,03	+0,22	—0,34	—0,55	4	3
Août	—0,06	—1,03	—0,05	—0,05	—0,02	—0,20	—0,68	0	7
Septembre	—0,33	—0,72	—0,18	—0,15	—0,13	—0,08	—0,35	0	7
Octobre	+0,03	—0,08	—0,19	—0,13	—0,22	+0,23	—0,58	2	5
Novembre	+0,12	+0,42	—0,05	+0,02	0,00	+0,46	—0,47	4	2
Décembre	+0,12	+0,71	—0,02	+0,06	+0,20	+0,64	—0,41	5	2
	1841	1841	1854	1854	1867	1844	1868		
	1849	1846	1869	1869	1870	1848	1871		

Si l'on rejette les années 1865, 1867 et 1869, à cause des irrégularités qu'elles présentent, la période annuelle devient:

janvier	+ 0′,18	juillet	— 0′,31
février	+ 0,75	août	— 0,33
mars	+ 0,90	septembre	— 0,59
avril	+ 1,12	octobre	— 0,04
mai	— 0,47	novembre	— 0,15
juin	— 0,59	décembre	— 0,46

Le nombre positif isolé de juillet disparaît donc de cette manière, ce qui vient à l'appui de l'opinion que les variations de ces trois années sont factices.

De même que M. Lloyd [1]), j'ai séparé en deux tableaux différents les stations situées au nord de l'équateur magnétique et celles situées au sud.

Mais, tandis que M. Lloyd a fait cette séparation afin de mettre en évidence l'existence de la période et en outre sa marche opposée dans les deux hémisphères, je crois pouvoir tirer des nombres un résultat contraire. Le tableau VIII montre, en effet, dans les premières colonnes une période tout autre que dans les dernières.

Toronto y figure deux fois; la colonne marquée II est prise de l'ouvrage de Lloyd et concorde avec celle que cet auteur a déduite des observations de Dublin.

La colonne Toronto I est tirée de l'ouvrage bien connu de M. Walker sur le magnétisme terrestre et accuse une période toute contraire, qui se rattache à celles de Kew et du Helder.

On voit par là qu'il est possible de faire parler les chiffres dans tel sens qu'on le désire, preuve suffisante de la non-existence d'une période. Le tableau montre en outre que beaucoup d'auteurs ont commis la faute de conclure à une période d'après un petit nombre d'années, ce qui est contraire à la nature du décroissement séculaire.

Le tableau IX ne donne pas, pour l'hémisphère sud, des résultats meilleurs que ceux du tableau VIII.

[1]) *A treatise on Magnetism*, London, 1874.

La faiblesse de la marche et l'incertitude de la question ne permettant pas d'attribuer beaucoup d'importance à la valeur absolue des grandeurs, j'ai seulement indiqué, comme résultat général, le nombre de fois que se présentent les signes + et —. On voit combien est fréquent le cas où ces nombres sont égaux.

La station la plus instructive, enfin, est Batavia. La période, qui en elle-même y est bien apparente, a entièrement disparu après que M. Bergsma eut corrigé de nouveau, au moyen des déterminations absolues, les observations faites avec le déclinomètre de Lamont.

Si, d'après cela, on regarde comme le résultat d'une erreur instrumentale la période qui a été trouvée en divers lieux, on aura, par celle-ci, les éléments d'une troisième approximation et correction pour les valeurs normales de la déviation diurne; il suffira d'ajouter à ces normales les nombres mêmes du tableau VIII, avec leurs signes respectifs.

---

6. Influence de la lune.

Pour étudier l'influence de la révolution synodique de la lune sur la déclinaison, j'ai suivi la méthode du simple classement par périodes de 29,5 jours.

A cet effet, j'ai dressé des tableaux comprenant 30 colonnes horizontales et 12 colonnes verticales. Dans la première de celles-ci sont inscrits les 30 premiers jours de janvier; la seconde repart du 30 et donne ensuite les jours de février; la troisième commence par le 1er mars; la quatrième, ainsi que toutes les autres colonnes paires, débute par le dernier nombre de la colonne précédente.

De cette manière se trouvent réunis, dans les lignes horizontales, des nombres qui sont éloignés l'un de l'autre alternativement de 29 et de 30 jours.

Appliquée à 24 moyennes horaires, cette disposition ferait connaître l'influence de la phase lunaire sur la position de l'aiguille aimantée; mais quand on l'applique à certaines heures seulement, à 2 h. par exemple, le résultat donne l'influence

susdite augmentée de la marche diurne causée par l'angle horaire de la lune. Lors de la pleine lune, l'astre culmine toujours à minuit, lors de la néoménie, à midi. Le jour lunaire étant plus long que le jour solaire, le passage au méridien arrive chaque jour environ 49^m plus tard, de sorte qu'à une même heure du jour civil correspondent successivement tous les angles horaires de la lune.

L'influence de cet angle horaire détermine, comme on le sait, une période double: les temps du maximum et du minimum diffèrent donc de 6 heures.

Il suit de là:

1° que l'influence de l'angle horaire ne peut pas être éliminée en prenant simplement la moyenne des trois observations, mais qu'il est nécessaire, pour cela, de prendre deux fois l'observation de 2^h.

2° que, par classement simple, la période déduite des différences 2^h—20^h et 2^h—8^h doit être environ deux fois aussi grande que celle résultant de l'observation de 2^h.

Comme, à l'origine, je m'étais proposé de déterminer l'influence de la lune sur la *position*, et non l'influence de l'angle horaire, j'ai commencé par former pour chaque jour, de 1855—1860, la quantité

$$\frac{20 + 2 + 2 + 8}{4},$$

et par classer les nombres obtenus. Le résultant ayant été négatif, je juge inutile de le communiquer.

Ensuite j'ai calculé pour 2^h, 2^h—20^h et 2^h—8^h, de 1861—74, la période de l'angle horaire.

Le but de ce calcul était de corriger la période pour 2^h, qui doit comprendre l'influence de la phase sur la position, au moyen des périodes pour 2^h—20^h et 2^h—8^h, qui doivent naturellement être affranchies de cette influence.

Le tableau X, bien que faisant ressortir l'influence de l'angle horaire, montre que les résultats ne sont ni assez nets, ni surtout assez comparables, pour que la correction dont il s'agit puisse être appliquée.

TABLEAU X.

Influence de la lune sur la déviation de l'aiguille aimantée au Helder.

Date.	Angle horaire de la lune.	Marche d'après 2 h. 1855—1874.	a marche d'après 2h—8h. 1861—1874.	b marche d'après 2h—20h. 1861—1864	$\frac{a+b}{4}$	Marche d'après 2 h. 1861—1874.	marche d'après $\frac{2+2+8+20}{4}$	Date.
		″	″	″	″	″	″	
1	9—38	— 21,9	+ 3,6	— 19,0	— 3,9	— 26,8	— 23,0	1
2	10—26	+ 3,0	— 6,4	+ 6,8	+ 0,1	— 5,1	— 5,2	2
3	11—14	+ 5,6	+ 39,3	+ 36,2	+ 18,9	+ 7,4	— 11,5	3
4	12—02	+ 20,2	+ 21,0	+ 31,2	+ 13,1	+ 21,3	+ 8,3	4
5	12—50	+ 20,4	+ 8,5	+ 42,0	+ 12,6	+ 18,8	+ 6,2	5
6	13—38	+ 23,3	+ 32,4	+ 33,8	+ 16,6	+ 31,0	+ 14,5	6
7	14—26	+ 17,9	+ 25,4	+ 8,3	+ 8,4	+ 23,9	+ 15,5	7
8	15—14	+ 8,4	— 20,0	— 2,7	— 5,7	+ 10,6	+ 16,3	8
9	16—02	+ 3,5	— 15,3	— 12,2	— 6,9	+ 5,6	+ 12,5	9
10	16—50	— 21,0	— 35,9	— 45,7	— 20,4	— 20,5	— 0,1	10
11	17—38	— 25,8	— 47,3	— 42,4	— 22,4	— 31,6	— 9,2	11
12	18—26	— 9,1	— 62,9	— 53,9	— 29,2	— 21,6	+ 7,6	12
13	19—14	— 26,9	— 37,5	— 25,1	— 15,7	— 24,1	— 8,5	13
14	20—02	— 4,1	— 20,9	— 6,7	— 6,9	— 8,4	— 1,5	14
15	20—50	+ 3,2	+ 44,9	+ 19,3	+ 16,1	+ 3,5	— 12,6	15
16	21—38	+ 0,7	+ 28,1	+ 12,9	+ 10,3	+ 8,2	— 2,1	16
17	22—26	+ 13,4	+ 37,5	+ 46,8	+ 21,1	+ 14,3	— 6,8	17
18	23—14	+ 19,5	+ 33,3	+ 46,3	+ 19,9	+ 24,0	+ 4,1	18
19	0—0	+ 34,2	+ 70,2	+ 48,1	+ 29,6	+ 39,6	+ 7,5	19
20	0—48	+ 11,4	+ 25,2	+ 13,5	+ 9,7	+ 3,6	— 6,1	20
21	1—38	+ 26,2	+ 41,1	+ 19,7	+ 15,2	+ 28,3	+ 13,1	21
22	2—26	+ 30,0	+ 9,6	+ 23,1	+ 8,2	+ 26,0	+ 17,8	22
23	3—14	+ 2,2	— 2,9	— 25,2	— 7,0	— 1,7	+ 5,3	23
24	4—2	— 12,7	— 35,7	— 19,2	— 13,7	— 6,7	+ 7,0	24
25	4—50	— 3,5	— 2,7	— 1,1	— 1,0	— 0,4	+ 0,6	25
26	5—38	— 27,9	— 49,0	— 38,9	— 22,0	— 23,2	— 1,2	26
27	6—26	— 37,9	— 35,6	— 46,5	— 20,5	— 33,9	— 13,4	27
28	7—14	— 28,6	— 65,7	— 29,7	— 23,9	— 31,9	— 8,1	28
29	8—2	— 5,2	+ 3,7	— 16,2	— 3,1	— 7,5	— 4,4	29
30	8—50	— 18,5	+ 14,1	— 16,6	— 0,6	— 22,9	— 22,3	30
sommes	—	486,2	875,7	789,1	402,7	532,4	—	—
poids.	—	0,83	1,17	1,17	1,75	0,58	—	—

Les poids inscrits dans ce tableau indiquent le nombre relatif des observations dont il a été fait usage: l'unité est *une* année d'observations horaires.

Dans la dernière colonne, j'ai essayé d'éliminer l'influence de l'angle horaire; mais comme les deux avant-dernières colonnes, d'où la dernière a été déduite, ont des poids tout à fait différents, l'influence en question s'accuse toujours, quoique d'une manière beaucoup moins nette.

La conclusion de ces recherches, c'est que toutes les périodes qu'on a trouvées pour le magnétisme terrestre se montrent aussi, grâce à l'assiduité de feu M. C. van der Sterr, dans les observations du Helder, bien que celles-ci n'aient pas été contrôlées assez souvent par des mesures absolues.

Note de M. Buys Ballot. — Je rappellerai que la période de 27,682 jours, attribuée jadis par moi à la rotation du soleil ou à celle d'un anneau entourant le soleil, ressortait aussi, dans les observations d'Utrecht, avec une valeur plus forte des différences $2^h - 20^h$ et $2^h - 8^h$ que des seules observations de 2^h.

SUR L'INTENSITÉ

DES

COURANTS ÉLECTRIQUES DU TÉLÉPHONE DE GRAHAM BELL,

PAR

J. BOSSCHA [1]).

---

1. Les expériences suivantes furent entreprises dans le but d'obtenir quelques données sur la grandeur des forces mises en jeu dans le téléphone de Graham Bell. Comme il existe des différences assez notables dans la sensibilité de ces instruments tels qu'ils sortent des ateliers des divers constructeurs, les résultats numériques, que je vais communiquer, ne peuvent s'appliquer qu'aux instruments spéciaux, dont je me suis servi. Ils suffiront cependant à fixer l'ordre de grandeur auquel appartiennent les mouvements mécaniques et électriques qui servent à la transmission du son.

2. Un téléphone, désigné dans la suite par le n°. 3, muni d'un poil rigide collé normalement au centre de la plaque, fut fixé dans une position horizontale au banc d'un comparateur de Dumoulin-Froment. Le microscope de ce comparateur est porté par une pièce mobile, dont le déplacement peut se mesurer au

[1]) Communiqué en extrait dans les séances de l'Académie des sciences d'Amsterdam du 29 Décembre 1877 et du 26 Janvier 1878.

moyen d'une vis micrométrique. Le pas de la vis est de 1 millimètre, le tambour de la tête de vis est divisé en cent parties et permet facilement d'évaluer les millièmes de millimètre ou microns. Le microscope fut pointé sur le poil de manière à faire coïncider l'un des fils de l'oculaire avec l'image de quelque accident de surface assez nettement défini pour permettre un pointé exact. Lorsqu'un courant électrique vient à passer par le fil conducteur du téléphone, la plaque, en s'éloignant ou en se rapprochant du pôle de l'aimant, fait mouvoir l'image du point de repère. L'axe de la vis micrométrique étant parallèle à l'axe de l'aimant, on pouvait mesurer facilement ce déplacement en tournant la vis micrométrique jusqu'à ce que l'image du point de repère coïncidât de nouveau avec l'axe optique du microscope. L'intensité du courant fut mesurée au moyen d'une boussole des tangentes de Siemens et Halske, dont les indications furent corrigées du défaut de proportionnalité des tangentes et des intensités, résultant de la longueur de l'aiguille. Le coefficient constant par lequel il faut multiplier les tangentes corrigées, pour obtenir l'intensité du courant en unités électromagnétiques de Weber, avait été déterminé par une série d'expériences préalables. Il fut trouvé égal à 1,22.

C'est ainsi qu'on obtint, comme moyenne de deux séries de mesures, pour le déplacement du centre de la plaque, les valeurs suivantes:

Intensité.	Déplacement.
0,1627	5,77 microns
0,2337	7,77 „

Les déplacements observés avaient en réalité le double de cette valeur, puisque, pour agrandir la longueur à mesurer, on faisait passer le courant alternativement en sens contraire.

Il résulte de ces données que les déplacements observés peuvent être regardés comme proportionnels à l'intensité du courant. On trouve, en effet, dans cette supposition, pour le déplacement ε produit par l'unité du courant:

$$\varepsilon = 35^{\mu},4$$
$$= 33\ ,3$$

Moyenne 34,3.

En répétant ces expériences sur trois autres téléphones, on obtint les nombres suivants:

Téléphone.	Valeur de ε.
N°. 1	$22^{\mu},5$
N°. 2	8 ,7
N°. 3	34 ,3
N°. 4	35 ,9

3. Les courants assez faibles employés dans ces expériences suffisaient cependant pour produire dans les téléphones un son perceptible à quelque distance. Afin de déterminer jusqu'à quel degré d'intensité il fallait affaiblir le courant pour que le son cessât d'être perceptible, le téléphone étant appliqué directement à l'oreille, le fil conducteur du téléphone, dont la résistance avait été déterminée en unités de Siemens (un mètre de mercure d'un millimètre carré de section) fut intercalé dans le courant dérivé d'un élément de Daniell. L'intensité du courant de la pile fut mesurée au moyen de la boussole des tangentes. La partie du circuit de la pile, qui se trouvait entre les deux points de jonction du courant dérivé, fut formée par un étalon d'une unité de Siemens. Dans le circuit du courant dérivé fut placé un rhéostat à bouchons, permettant d'introduire des résistances jusqu'à 10000 unités de Siemens. On pouvait donc affaiblir l'intensité du courant jusqu'à moins d'un dix-millième du courant de la pile. Celui-ci fut fermé ou interrompu au moyen d'un fil de cuivre plongeant dans un godet à mercure. En introduisant dans le circuit du courant dérivé des résistances de plus en plus considérables, on affaiblissait le courant passant par le téléphone, jusqu'à ce que le passage ou l'interruption du courant ne donnât plus un son perceptible. Les résultats de ces expériences sont consignés dans le tableau suivant:

Téléphone.	Courant limite.	Déplacement limite.
N°. 1.	0,000100	0^{μ},00225
N°. 2.	0,000153	0 ,00133
N°. 3.	0,000084	0 ,00288
N°. 4.	0,000066	0 ,00237.

Dans la troisième colonne on a calculé, à l'aide des expériences du paragraphe précédent, les déplacements du centre de la plaque correspondants aux courants limites. A l'exception du second, les nombres obtenus s'accordent à assigner, au plus faible déplacement du centre de la plaque qui donne lieu à un son perceptible, la valeur de $2\frac{1}{2}$ millionièmes d'un millimètre, c'est-à-dire environ $\frac{1}{200}$ de la longueur d'onde de la lumière jaune.

4. On peut pousser bien plus loin l'affaiblissement du courant, si, au lieu d'une simple interruption du courant, on fait agir sur la plaque des interruptions périodiques, comme celles qu'on peut produire avec la membrane vibrante du téléphone de Reiss. C'est ainsi que le téléphone n°. 3 donnait encore un son distinct lorsqu'un courant d'une intensité 0,0000155 fut interrompu périodiquement par la membrane mise en vibration par le son d'un tuyau d'orgue donnant le *la* normal. En admettant que par le jeu de la membrane le courant est fermé pendant toute la durée d'une oscillation et interrompu pendant toute la durée d'une oscillation suivante, et que de plus le courant pendant qu'il passe a constamment la même intensité que lorsque la membrane est en repos, ce qui constituerait les conditions les plus avantageuses de l'action du courant, il en résulterait que des courants alternatifs d'une intensité 0,0000077 produiraient encore un son sensible. Très probablement la limite est notablement inférieure à cette valeur.

5. Dans sa conférence à la Société des arts de Londres, M. Graham Bell a rapporté que le téléphone ne cesse pas de transmettre des sons articulés lorsque la cavité entre la plaque et le couvercle en bois est obstruée par un tampon.

M. Graham Bell cite cette expérience à l'appui de l'opinion que le mouvement de la plaque est plutôt moléculaire (rather

molecular than anything else), la résistance du tampon devant empêcher les mouvements de la plaque en entier. Il me semble difficile d'admettre que le tampon ait été assez incompressible pour opposer une résistance appréciable à un déplacement de la plaque qui serait considérablement moindre que la longueur d'une onde lumineuse. L'expérience de M. Graham Bell ne prouve donc pas que les mouvements de la plaque différeraient en nature de ceux d'une membrane vibrante.

5. Pour mesurer l'intensité du courant induit résultant d'un mouvement donné de la plaque, le microscope du comparateur fut remplacé par une tige en bois, portant une seconde tige transversale qu'on pouvait diriger selon le prolongement de l'axe du téléphone. La pointe mousse de la tige transversale fut rapprochée du téléphone, de manière non seulement à toucher le centre de la plaque, mais aussi à la courber en dedans de deux ou trois dixièmes de millimètre. Les deux bouts du fil conducteur du téléphone étaient en communication avec un galvanomètre sensible. L'aiguille astatique du galvanomètre portait un petit miroir concave, qui projetait sur une échelle divisée, placée à 1220 millimètres de distance, l'image d'un diaphragme à flèche éclairé par une lampe de Drummond.

En tournant de dix divisions dans un sens déterminé la tête de vis du porte-microscope, le centre de la plaque se rapprochait de 0,1 millimètre du pôle de l'aimant. Le courant induit faisait mouvoir l'aiguille du galvanomètre, de manière à déplacer de quelques millimètres l'image de la flèche sur l'échelle divisée. Au moment où l'aiguille, revenant de son excursion, passait par sa position d'équilibre, on tournait la vis micrométrique dans le sens inverse, ce qui, en éloignant la plaque du pôle de l'aimant, produisait un courant contraire qui accélerait le mouvement de retour de l'aiguille. En répétant ces mouvements alternatifs de la vis micrométrique, on agrandissait les courses successives de l'image sur l'échelle, jusqu'à atteindre une certaine valeur limite, de a millimètres. Weber, qui a le premier appliqué cette méthode, dite de multiplication, a donné la formule par laquelle on déduit

de l'angle α, correspondant à la course maximum a de l'image sur l'échelle, la vitesse angulaire C imprimée à l'aiguille par chaque impulsion du courant. En désignant par T la durée d'une oscillation de l'aiguille, par e la base des logarithmes naturels, par λ le décrément logarithmique naturel de l'aiguille, c'est-à-dire le logarithme naturel du rapport de deux élongations successives lorsque l'aiguille oscille librement, le circuit du galvanomètre étant fermé, cette formule devient

$$C = \frac{\alpha}{2}\frac{\pi}{T}(1 - e^{-\lambda})e^{\frac{\lambda}{\pi}\,Arc.\,tg\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Pour de faibles valeurs de $\frac{\lambda}{\pi}$, on peut, avec une approximation suffisante, la remplacer par la suivante:

$$C = \frac{\alpha}{2}\frac{\pi}{T}(1 - e^{-\lambda})(1 + \frac{1}{2}\lambda).$$

Soient F le moment électrodynamique du galvanomètre, c'est-à-dire le moment du couple qui agit sur l'aiguille lorsque l'unité du courant passe par le fil du galvanomètre, et K le moment d'inertie de l'aiguille, la vitesse angulaire imprimée à l'aiguille au bout du temps dt par le courant i sera

$$dC = \frac{F}{K}i\,dt = \frac{FE}{KR}dt,$$

en désignant par E l'intensité du courant induit dans un circuit dont la résistance serait égale à l'unité, et par R la somme des résistances du galvanomètre et du fil du téléphone.

La vitesse angulaire produite par le courant induit total résultant de chaque mouvement de la plaque sera

$$C = \int \frac{FE}{KR}dt$$

et par suite

$$\int E\,dt = \frac{\alpha}{2}\frac{RK}{F}\frac{\pi}{T}(1 - e^{-\lambda})(1 + \frac{1}{2}\lambda) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Pour mesurer F, le courant d'un élément de Daniell fut divisé entre l'étalon d'une unité de Siemens et le galvanomètre. Dans le circuit de la pile se trouvait la boussole des tangentes. Celui du galvanomètre, dont la résistance avait été évaluée à 158 unités de Siemens, contenait le rhéostat à bouchons, dont la résistance était réglée de manière à obtenir pour des courants de 10 à 15 degrés à la boussole des déplacements de l'image sur l'échelle du galvanomètre de 60 à 90 millimètres. En notant les indications simultanées des deux instruments, on obtient les données nécessaires pour calculer l'intensité absolue du courant J qui faisait dévier de 1 millimètre l'image sur l'échelle. Soit φ l'angle de déviation de l'aiguille correspondant à un millimètre de l'échelle, D la force directrice de l'aiguille, on a

$$J F = D \sin \varphi = D \varphi.$$

D'autre part on a

$$T^2 = \pi^2 \frac{K}{D},$$

d'où

$$\frac{K}{F} = \frac{T^2 J}{\pi^2 \varphi}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), et en remarquant qu'on a sensiblement

$$\alpha = a \varphi,$$

on obtient

$$\int E\, dt = \frac{a}{2} \frac{T}{\pi} J R (1 - e^{-\lambda}) (1 + \frac{1}{2} \lambda).$$

Les courses maximum obtenues par le mouvement alternatif de la vis micrométique différaient notablement entre elles selon la position initiale de la plaque. C'est ainsi qu'avec le téléphone n°. 3 on obtint les valeurs suivantes de a pour les mouvements de la vis indiqués par les différentes lectures du tambour.

Tambour.	Course maximum.
de 50 à 60	79mm,0
„ 60 „ 70	72 ,3
„ 70 „ 80	64 ,5
„ 80 „ 90	32 ,0
„ 90 „100	0 ,0
„ 75 „ 85	62 ,3

Les lectures croissantes du tambour correspondent au recul de la tige en bois. On voit que les courants induits par des déplacements égaux de la plaque diminuent assez régulièrement en intensité à mesure que la plaque s'éloigne de l'aimant. L'abaissement brusque du courant lorsqu'on passe de l'intervalle 70—80 à 80—90 indique que le contact de la tige avec la plaque cesse un peu au-delà de 85, ce qui est confirmé par l'absence de courant lorsqu'on tourne le tambour de 90 à 100 et par la valeur 62,3 obtenue pour le mouvement de 75 à 85. De 85 à 95 on observait une oscillation de l'aiguille trop faible pour pouvoir être mesurée. On peut donc regarder la course 62,3, obtenue pour l'intervalle 75 à 85, comme la mesure approchée du courant induit lorsque le centre de la plaque, partant de sa position d'équilibre, est déplacé d'un dixième de millimètre.

Comme la sensibilité du galvanomètre, le décrément logarithmique et la durée d'une oscillation de l'aiguille variaient d'un jour à l'autre, ces valeurs furent déterminées de nouveau dans chaque série d'expériences. Comme exemple je citerai les nombres suivants, obtenus avec le téléphone n°. 3.

$T = 5'',30$, $\lambda = 0,2451$, $J = 0,0000002698$,

$R = 198$ unités de Siemens $= 1924.10^9$ unités de Weber,

d'où il résulte:

$$\int E\,dt = 6660000,$$

pour la quantité d'électricité qui, par suite du mouvement de la plaque de 0,1 millimètre, passerait par chaque section du circuit du téléphone n°. 3 si la résistance du circuit était l'unité.

Dans le tableau suivant j'ai réuni les valeurs obtenues pour les téléphones n°. 1 à n°. 4, réduites à un mouvement de la plaque d'un micron d'amplitude.

Téléphone.	$\int E dt.$
N°. 1	94100
N°. 2	45500
N°. 3	66600
N°. 4	56900.

6. Les ébranlements de la plaque du téléphone, lorsqu'on parle devant cet instrument avec une intensité de voix ordinaire, sont tellement petits qu'il m'a été impossible de les mesurer. En pointant le microscope sur une petite aspérité bien définie du poil collé au centre de la plaque, je n'ai pu observer aucun trouble dans l'image lorsqu'on venait à parler devant le téléphone. En employant un microscope grossissant 250 fois, la netteté de l'image me semblait diminuer. J'estime probable que les oscillations du poil n'atteignaient pas une amplitude d'un millième de millimètre. Si des mouvements tellements petits et à période rapide, sont communiqués intégralement par la plaque au poil, il en résulterait que les quantités d'électricité mises en mouvement dans le téléphone sont excessivement faibles. Dans un circuit de deux téléphones réunis, comme les téléphones n°. 3 et n°. 4, présentant ensemble une résistance de 70 unités de Siemens ou de 68.10^{10} unités de Weber, la quantité d'électricité circulant par suite d'une oscillation de la plaque de 1 micron d'amplitude ne serait en moyenne que de

$$\frac{62.10^3}{68.10^{10}} = 0{,}000000091 \text{ unités électromagnétiques.}$$

Cette quantité ne pourrait décomposer que 8½ dix-millionnièmes d'un microgramme ($0^{mgr.}{,}001$) d'eau.

7. Un son de 880 vibrations simples, qui communiquerait à la plaque des vibrations de un micron d'amplitude, ferait naître dans le circuit des courants dont l'intensité moyenne serait

$$880.\ 0{,}000000091 = 0{,}0000792.$$

Il résulte de notre expérience avec la membrane de Reiss (§ 4) que ce faible courant doit donner dans le téléphone récepteur un son parfaitement perceptible.

8. L'extrême sensibilité de la plaque du téléphone et la sensibilité non moins étonnante de l'oreille humaine font du téléphone un instrument précieux pour discerner dans les courants électriques des particularités que jusqu'ici aucun autre instrument n'a pu nous déceler. C'est ainsi que le téléphone, appliqué au conducteur d'une machine électrique de Holtz, permet de distinguer la périodicité des mouvements électriques dans le fil conducteur. On constate facilement que la hauteur du son du téléphone, lorsque le plateau de la machine est tourné avec une vitesse uniforme, dépend de la résistance du circuit et de la capacité des condensateurs.

Lorsqu'on fait passer le courant d'une machine de Holtz par un tube de Geissler, on peut régler la résistance du circuit et la capacité des condensateurs de manière à obtenir dans le tube des stratifications bien définies. Le téléphone permet d'observer que l'arrangement qui produit cet effet, donnant dans le téléphone un son de hauteur définie, correspond à une période définie des décharges électriques.

SUR

L'ALBUMINE DU SÉRUM ET DE L'OEUF ET SUR SES COMBINAISONS,

PAR

A. HEYNSIUS.

Dans le cours de mes recherches sur les matières albuminoïdes, je me suis convaincu de plus en plus qu'une étude quantitative fondamentale de l'influence exercée sur ces matières par les alcalis, les acides et les sels est impérieusement réclamée et serait de nature à lever une foule de contradictions qui existent dans les données de la chimie de l'albumine. On en savait bien assez, au sujet de cette influence, pour que personne ne pût la mettre en doute, mais, sous le rapport quantitatif, elle n'avait été examinée qu'imparfaitement. On avait appris à connaître différentes particularités intéressantes concernant le rôle des susdits facteurs, mais la valeur n'en avait pas été déterminée avec précision, *la question n'avait pas été analysée systématiquement.* Dans l'étude des propriétés des matières albuminoïdes naturelles, on cherchait, suivant moi, à résoudre une équation complexe à deux inconnues et même, comme il devint bientôt manifeste, à trois inconnues, sans connaître même d'une manière approchée la valeur de celles-ci. Y avait-il lieu de s'étonner qu'on obtînt des résultats divergents?

Il me parût que les valeurs de ces inconnues devaient d'abord

être déterminées séparément avec toute l'exactitude possible, avant qu'on pût aborder avec fruit la solution de l'équation principale; en d'autres termes, que l'étude des propriétés des corps albuminoïdes naturels ne pouvait nous mener très loin, tant que l'influence des alcalis, des acides et des sels n'avait pas été scrutée méthodiquement.

Pour apprendre à connaître cette influence, il était nécessaire de préparer des solutions albumineuses contenant aussi peu de sels que possible. Le meilleur moyen d'y parvenir me parut être la dialyse de solutions albumineuses naturelles. Je n'espérais nullement éloigner ainsi *tous* les sels, l'expérience antérieure ayant déjà rendu très probable l'impossibilité de ce résultat; il s'agissait seulement de réduire les sels à un minimum. Pour cela, je jugeai qu'une condition essentielle était le contact d'une grande quantité d'eau. J'employai donc des dialyseurs à large surface diffusive, et comme, à l'origine du moins, je ne disposais pas d'autant d'eau distillée qu'il m'en eût fallu, je me servis d'eau de pluie, dont la teneur en matières salines est si faible que je crus pouvoir la négliger.

L'expérience prouva toutefois que, si les sels ordinaires de cette eau n'exerçaient pas d'influence sensible, un principe *accidentel* y jouait un rôle considérable. L'eau de pluie employée, qui était recueillie sur un toit en zinc, contenait un sel de zinc, et la présence de celui-ci modifiait entièrement les propriétés de la solution albumineuse dialysée. Tandis que, dialysées avec beaucoup d'eau distillée, les solutions albumineuses naturelles (sérum du sang et blanc d'œuf) abandonnent une quantité plus ou moins grande de paraglobuline (ou au moins d'une matière analogue), en laissant une solution albumineuse qui ne se coagule pas quand on la chauffe, ni même quand on la fait bouillir, on trouva qu'après la dialyse avec l'eau zincifère il se séparait une proportion beaucoup plus forte de paraglobuline (où d'une matière analogue), et qu'il restait alors une combinaison d'albumine avec environ 1,5 pour cent de matières minérales (acide phosphorique, chaux et magnésie), laquelle non-seulement se coagulait par la

chaleur, mais était déjà décomposée partiellement à basse température, avec dépôt d'albumine à l'état non coagulé.

Cette albumine non coagulée, c'est-à-dire soluble dans les dissolutions salines neutres, fut trouvée soluble aussi dans les alcalis et les acides très étendus, et elle me permit de constater:

1°. Que les albuminates alcalins diffèrent suivant le degré de concentration de l'alcali employé. Les alcalis faibles donnent lieu à une combinaison qui ne le cède pas en solubilité à la paraglobuline.

2°. Que les albumines acides diffèrent également selon l'énergie et le degré de concentration de l'acide.

L'influence du zinc est due en partie à ce qu'il enlève de l'alcali à l'albumine; le zinc agit donc comme un acide. Par la dialyse avec l'eau distillée, l'alcali qui existe dans les solutions albumineuses naturelles n'en est pas entièrement éliminé, et c'est à cela qu'il faut attribuer la propriété des solutions albumineuses dialysées avec l'eau distillée de ne pas coaguler quand on les fait bouillir: l'alcali restant maintient alors l'albumine à l'état dissous pendant l'ébullition. Comme, toutefois, la neutralisation la plus exacte de solutions albumineuses dialysées, même de celles qui sont pauvres en sels, ne précipite jamais autant d'albumine que l'emploi de l'eau zincifère, j'en conclus que, outre l'albumine non précipitable, unie aux phosphates de chaux et de magnésie, et la paraglobuline précipitable par soustraction d'alcali, il existait encore une autre combinaison albumineuse, qui n'est pas précipitée par la neutralisation, mais bien par l'eau chargée d'oxyde de zinc [1]).

En même temps que moi, bien qu'avec un tout autre dessein, — à savoir, pour étudier encore une fois la question de la solubilité de l'albumine dans l'eau, — M. Aronstein s'occupait également, sous la direction de M. A. Schmidt, de la dialyse de solutions albumineuses naturelles. Lui aussi cherchait à rendre la dialyse aussi énergique que possible, et attendu qu'il ne se

[1]) *Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium der Leidsche Hoogeschool*, t. III, 1874; et Pflüger's *Archiv*, t. IX, p. 314.

proposait pas, comme moi, d'étudier la manière dont les solutions albumineuses dialysées se comportent en présence des alcalis, des acides et des sels, mais qu'il voulait seulement constater la solubilité ou l'insolubilité de l'albumine dans l'eau, il opérait sur de très petites quantités (quelques centim. cubes) de blanc d'œuf ou de sérum sanguin, de sorte que le fond de ses dialyseurs assez petits était à peine couvert; il dialysait d'ailleurs avec de l'eau distillée. M. Aronstein parvint ainsi aux résultats suivants :

1°. Par la dialyse on peut obtenir de l'albumine *exempte* de sels.

2°. L'albumine du sérum, aussi bien que celle de l'œuf, est une espèce albumineuse soluble dans l'eau, et qui, même après addition d'un acide, ne se coagule pas quand on la fait bouillir.

3°. La coagulation de ces deux espèces d'albumine, sous l'influence de la chaleur, est due uniquement à la présence de sels étrangers.

4°. Les sels de terres alcalines, qui se trouvent dans le sang, ne sont pas combinés avec les matières albuminoïdes, mais avec d'autres matières, que la dialyse peut enlever à la solution albumineuse.

Ces résultats étaient diamétralement opposés aux miens. Le succès de l'expérience dépendait toutefois, d'après MM. Aronstein et Schmidt, de la qualité du papier-parchemin employé. Les sels avaient été éliminés le mieux quand on s'était servi d'un papier très mince, provenant de Graham. Le papier-parchemin allemand donnait des résultats beaucoup moins bons. Chez M. de la Rue, à Londres, on pouvait toutefois se procurer — ainsi écrivait M. Schmidt dans une note additionnelle au travail de M. Aronstein — un papier-parchemin qui, sous le rapport en question, paraissait surpasser encore le papier primitif. Bien que je ne m'attendisse pas à obtenir avec le papier recommandé les résultats de M. Aronstein, je ne négligeai pourtant pas d'en faire venir de Londres, et de répéter l'expérience tant avec ce papier qu'avec quelques autres sortes originaires de Graham. Comme je l'avais prévu, mes résultats restèrent au fond les mêmes. En dialysant avec l'eau distillée, j'obtenais une solution albumineuse à réaction alcaline plus ou moins prononcée,

d'où les sels neutres solubles étaient entièrement éliminés, comme le prouvait l'absence totale du chlore, mais dans laquelle, outre une proportion plus ou moins forte d'alcali, il y avait encore des sels insolubles. La solution albumineuse n'était pas coagulée par l'ébullition; mais tandis que, avant l'application de la chaleur, les acides faibles n'y produisaient qu'un précipité léger (de paraglobuline), soluble dans les solutions salines étendues, je voyais, après l'ébullition, naître sous l'influence des acides un précipité abondant, qui ne se dissolvait pas dans les solutions salines étendues. J'en conclus que l'albumine du composé albumineux, lui-même coagulable à la température de l'ébullition, était tenue dissoute par la présence de l'alcali, et se transformait sous son influence, lors de l'ébullition, en albuminate alcalin. Je ne pouvais pas m'expliquer autrement pourquoi l'albumine n'était pas précipitée par les acides avant l'ébullition, mais bien après. Je constatai, en outre, que de *très petites quantités d'alcali*, et aussi de *très petites quantités d'acide* empêchent la coagulation de solutions albumineuses pauvres en sels.

Je me crus donc autorisé à conclure: 1°. que MM. Aronstein et Schmidt avaient regardé leurs solutions albumineuses dialysées comme *exemptes de sels*, parce qu'ils avaient incinéré de trop petites quantités de matière; 2°. qu'ils avaient vu ces solutions rester limpides quand on les chauffait, parce qu'elles contenaient encore de l'*alcali*; et 3°. qu'ils n'avaient pas obtenu de coagulation même après l'addition d'un acide, parce qu'ils avaient ajouté *trop* d'acide.

Dans une communication postérieure, faite par M. Schmidt lui-même (qui ne connaissait pas encore mon travail), l'assertion de la non-coagulabilité des solutions albumineuses dialysées, puis additionnées d'acide [1]), fut retirée. M. Schmidt constata que M. Aronstein avait ajouté trop d'acide et que, introduit en quantités plus petites, l'acide fait bien dûment coaguler par l'ébullition les solutions albumineuses dialysées. Quant à la solubilité

[1]) *Beiträge z. Anat. u. Physiol. als Festgabe Ludwig gewidmet*, p. 108.

de l'albumine dans l'eau, elle fut maintenue, et l'absence d'alcalis et de sels resta par conséquent admise.

Cette communication de M. Schmidt me confirma dans l'idée qu'il avait obtenu, tout comme moi, non pas des solutions albumineuses *exemptes* de sels, mais des solutions *pauvres* en sels, et ses dosages de paraglobuline me donnèrent la certitude que dans ses expériences, pas plus que dans les miennes, l'alcali n'avait été entièrement éliminé.

Il me sembla que cet alcali pourrait être mis complétement hors de cause par la neutralisation des solutions albumineuses naturelles, et comme, des expériences de M. Schmidt aussi bien que des miennes, il résultait que les sels neutres solubles sont assez faciles à éliminer, je jugeai qu'en opérant ainsi on diminuerait considérablement la quantité des sels solubles des cendres. En même temps, on apprendrait à connaître de cette manière dans quelle proportion peuvent être réduits les sels insolubles.

Il était nécessaire, d'un autre côté, de dialyser avec plus d'énergie que M. Schmidt et moi ne l'avions fait jusqu'alors. J'avais reconnu que, au moyen du renouvellement fréquent de l'eau distillée, les sels neutres solubles s'enlèvent facilement en 24 heures, et que des changements importants se manifestent dans les propriétés de la solution albumineuse dialysée, lorsque l'opération est continuée plus longtemps. Mais cette longue durée de l'expérience présentait un inconvénient, puisque, dans ces conditions, la matière albumineuse elle-même pouvait subir des altérations. Tant dans les expériences de M. Schmidt que dans les miennes, où le papier-parchemin était tendu horizontalement, un autre inconvénient se faisait sentir de plus en plus, à mesure que la dialyse devenait plus parfaite. La quantité de paraglobuline qui se dépose sur le fond du dialyseur augmente alors notablement et entrave de plus en plus la suite de l'opération.

A ces diverses difficultés il est parfaitement obvié dans les dialyseurs de M. Huizinga [1]). Le liquide à dialyser s'y trouve

[1]) Voir Pflüger's *Archiv*, t. XI, p. 392, 1875. Longtemps avant la publication de son Mémoire, M. Huizinga avait eu l'obligeance de me communiquer son dialyseur et de me faire connaître ainsi l'emploi de la colle au chromate.

en contact avec l'eau sur une large surface, et le précipité qui se forme dans le cours de l'expérience met peu ou point d'obstacle à la dialyse, parce que le papier-parchemin est tendu verticalement.

Depuis que j'ai eu connaissance de ces dialyseurs, je m'en suis toujours servi, en opérant à peu près comme M. Huizinga. D'un réservoir ayant une contenance d'au moins 60 litres, l'eau distillée coulait par un siphon dans un vase central, dont le niveau était maintenu constant au moyen d'un tube à air communiquant avec le réservoir. Des siphons amenaient ensuite l'eau du vase central dans d'autres vases, établis à la même hauteur, et en nombre égal à celui des dialyseurs employés. Ces derniers vases consistaient en flacons à col étroit, dont le fond avait été enlevé et qui étaient placés dans une position renversée.

Il n'était donc pas nécessaire, comme dans la disposition adoptée par M. Huizinga, d'éloigner par un siphon l'eau distillée qui avait été en contact avec les dialyseurs; cette eau s'écoulait par le col du flacon, conséquemment par le point plus bas, ce qui naturellement est préférable. On recueillait séparément l'eau provenant de chaque flacon, et on en mesurait la quantité par 24 heures.

Pour neutraliser l'alcali, j'employais toujours l'acide en proportions déterminées. J'avais trop bien appris à connaître les avantages de la méthode quantitative rigoureuse, pour me contenter d'une neutralisation approximative, qui, — en l'absence de toute mesure pour estimer le degré d'alcalinité par le papier ou la teinture de tournesol, — peut être très inégale. Désirant avoir la certitude que mes solutions albumineuses étaient comparables entre elles sous le rapport de l'alcalinité, j'essayai d'abord de les neutraliser au moyen de l'acide chlorhydrique à $\frac{1}{10}$ du titre normal, mais je ne tardai pas à reconnaître que cela est impossible. On voit bien, après l'addition d'un peu d'acide, la réaction alcaline faire promptement place à une réaction acide, mais, abandonné alors quelque temps à lui-même, le liquide redevient alcalin, et lorsque finalement on a ajouté assez d'acide pour que la liqueur reste indéfiniment neutre aux réactifs colorés, ou même faiblement acide, elle n'en reprend pas moins une réaction

alcaline quand on la fait bouillir. *La réaction neutre des solutions albumineuses n'est donc pas une preuve de l'absence d'alcali*, comme M. Schmidt semble le croire [1]), bien que le contraire, si je ne me trompe, soit généralement connu.

J'ai trouvé que le sérum du sang de vache exige ordinairement, par 100 centim. cubes, 40 c.c. d'acide chlorhydrique à $\frac{1}{10}$ du titre normal, pour montrer, même après l'ébullition, une réaction neutre ou faiblement acide; en conséquence, j'ai toujours ajouté à 100 c.c. de sérum 32 c.c. d'acide chlorhydrique $\frac{1}{10}$ normal, quantité qui ne fixe pas tout l'acide libre, mais avec laquelle le liquide, à la température ordinaire, se rapproche autant que possible de la réaction neutre [2]).

[1]) Parmi les questions que M. Schmidt croit devoir m'adresser à la fin de son Mémoire (Pflüger's *Archiv*, t. XI, p. 48), se trouve aussi celle-ci: „Les dissolutions albumineuses neutres deviennent-elles alcalines par la dialyse?" Cette question est mal formulée. Voici comment elle devrait être posée: L'albumine ne fixe-t-elle pas de l'alcali, et ne peut-il y avoir, dans les solutions albumineuses à réaction neutre, de l'alcali ainsi uni à l'albumine? Or, à cette question, la réponse est décidément affirmative. On le savait depuis longtemps. C'est à cause de cela, en effet, que, pour précipiter la paraglobuline, nous ajoutons des acides faibles jusqu'à ce que la liqueur prenne nettement la réaction acide. Quand on s'arrête au point précis de la neutralisation, nous savons bien que toute la paraglobuline n'est pas séparée.

[2]) Rien d'analogue n'a été observé pour les acides. On sait bien que les sels acides donnent lieu à une réaction acide, sans qu'il y ait de l'acide libre dans la liqueur, mais, qu'une réaction neutre puisse coexister avec la présence d'un acide libre (l'acide carbonique excepté), c'est ce qui n'est pas connu.

Il est à remarquer que dans cette question M. Schmidt raisonne d'une manière toute contraire. Après l'addition d'un acide, il voit la coagulation se produire sous l'influence de la chaleur, et, bien que le liquide ne montre pas de réaction acide, il attribue cette coagulation à la présence de l'acide; mais, à son avis, il ne saurait y avoir de l'alcali dans une solution albumineuse à réaction neutre.

Le papier-réactif dont je me sers est extrêmement sensible. Le papier rouge vire distinctement au bleu quand on le plonge dans ½ c.c. d'eau contenant 0gr.,000012 d'alcali. Le papier bleu se colore distinctement en rouge avec ½ c.c. d'eau dans lequel il y a 0gr.,000005 d'acide. La teinture de tournesol préparée d'après le procédé de M. Vogel présente la même sensibilité dans les liquides incolores, mais, pour les liquides plus ou moins colorés, tels que le sérum de vache, par exemple, mon papier est de beaucoup supérieur.

Le blanc d'œuf était divisé avec des ciseaux, battu, étendu d'un égal volume d'eau et filtré. Il exigeait alors sur 100 c. c. (= 50 c. c. de substance primitive) 22 c. c. d'acide chlorhydrique $\frac{1}{10}$ normal, pour rester neutre après l'ébullition. A froid, il ne pouvait toutefois supporter, sans prendre une réaction acide, autant d'acide que le sérum du sang. En conséquence, quand j'opérais sur l'albumine de l'œuf, je n'ajoutais ordinairement, pour émousser l'alcali qu'elle contenait, que 16—18 c. c. d'acide chlorhydrique $\frac{1}{10}$ normal sur 100 c. c. (= 50 c. c. d'albumine naturelle).

La papier-parchemin employé était un papier allemand assez mince, qui pesait en moyenne 0gr.,775 par décim. carré. Avant de se servir des dialyseurs, on avait toujours soin de s'assurer de leur continuité, et on les faisait tremper pendant quelques jours dans l'eau, pour les débarrasser du chromate potassique en excès. Quand on opérait sur environ 30 c. c. de liquide, la surface dialysante mesurait au moins 128 cm. carrés.

Le long de chaque dialyseur je faisais ordinairement couler, le premier jour, 1 litre d'eau par heure. Les jours suivants, cette quantité était réduite à 12—18 litres par 24 heures. A l'origine, j'arrêtais la dialyse au bout de trois jours; plus tard, je la continuai pendant quatre ou cinq jours, parce que j'avais reconnu, lors de la combustion, que la quantité des cendres diminuait encore de plus en plus.

En même temps, toutefois, j'observai qu'à mesure que la proportion des cendres devenait moindre, la solubilité de l'albumine chauffée n'augmentait pas, mais diminuait. La solution albumineuse, qui d'abord, après une dialyse encore incomplète, reste limpide quand on la fait bouillir, devient peu à peu opalescente sous l'influence de la chaleur, et finalement, après une dialyse complète, elle se trouble tellement par l'ébullition, que MM. Aronstein et Schmidt n'auraient jamais parlé de la solubilité de l'albumine à la température de l'ébullition, si dans leurs premières dialyses ils avaient obtenu des solutions albumineuses pareilles à celle dont il vient d'être question.

Je conclus de ces phénomènes que l'alcali restant avait à bon droit été regardé par moi comme la cause de la non-coagulabilité des solutions albumineuses dialysées. Si la coagulation devait être attribuée aux sels, comme le pense M. Schmidt, il serait tout à fait incompréhensible que les solutions albumineuses, à mesure que la dialyse est prolongée, recommencent peu à peu à se troubler par la chaleur. Si au contraire la non-coagulabilité par l'ébullition des solutions albumineuses dialysées dépend de la présence de l'alcali, la chose s'explique facilement. Les sels neutres solubles une fois éliminés, — point qui est assez vite atteint, — la suite de l'opération amènera graduellement aussi la diminution de l'alcali, qui dialyse plus lentement, et dont finalement il restera si peu que ce reste ne sera plus en état de maintenir toute l'albumine en solution à la température de l'ébullition.

Cette explication est d'accord avec le fait que le mode d'échauffement a une grande influence sur la coagulation. Lorsque les solutions albumineuses sont chauffées directement sur la flamme, le liquide se trouble toujours beaucoup plus fortement que lorsqu'il est porté lentement à 100° au bain-marie; dans le premier cas, on voit même souvent se produire une coagulation en flocons, tandis que dans le second tout se borne à un haut degré d'opalescence.

L'explication est d'accord aussi avec la circonstance que le trouble apparaît à une température d'autant plus basse que la dialyse a été continuée plus longtemps. Une solution albumineuse, qui aujourd'hui reste limpide quand on la fait bouillir, se troublera demain à 80°, plus tard à 70°, à 60°, et même à 50°.

Elle est d'accord, enfin, avec l'observation que la quantité de paraglobuline déposée augmente à mesure qu'on dialyse plus énergiquement. Au moyen des acides on peut précipiter, du sérum de vache étendu de 10 fois son volume d'eau, environ 0,80 pour cent de paraglobuline. Par la dialyse, M. Schmidt a retiré du sérum non neutralisé 0,5—1,1 pour cent de paraglobuline [1]). Le

[1]) *Beiträge zur Anatomie und Physiologie als Festgabe Ludwig gewidmet*, 1875, p. 102.

liquide neutralisé en fournit beaucoup plus: 1,5, 1,6, même 1,8 pour cent et d'autant plus que la dialyse a été plus complète [1]).

A l'origine, la question m'avait paru ne pouvoir être tranchée que par le dosage des éléments solubles et insolubles des cendres. Il était à prévoir, toutefois, que la proportion d'alcali, nécessaire pour empêcher la coagulation partielle ou totale, serait petite, et que les dosages des cendres devraient par conséquent porter sur d'assez grandes quantités de matière, si l'on voulait obtenir des résultats méritant confiance. Je communique ci-dessous quelques-uns de ces dosages de cendres, en me bornant à ceux des dialyses les mieux réussies, vu que les autres n'auraient aucun intérêt pour le lecteur. On peut sans doute réduire encore un peu plus la proportion des cendres, à la seule condition de prolonger davantage la dialyse; si je ne l'ai pas fait, c'est, d'une part, parce que je reconnus bientôt que ces dosages de cendres, même exécutés avec tout le soin convenable, étaient peu concluants; d'autre part, parce que je trouvai un autre moyen de résoudre la question, grâce auquel le dosage des cendres devenait superflu.

Dans les expériences dont il s'agit ici, comme dans toutes les suivantes, le sérum employé était toujours du sérum de sang de vache, bien séparé, jaune (contenant peu de corpuscules sanguins), non dilué. Le blanc d'œuf de poule était étendu d'un égal volume d'eau.

Après la dialyse, les liquides étaient filtrés — sur du papier traité par l'acide chlorhydrique, puis lavé — pour séparer la paraglobuline déposée. Dans les liquides se trouvait alors, à l'état dissous, la quantité d'albumine indiquée ci-après.

La quantité de sérum et de blanc d'œuf, soumise à la dialyse, était de 25 c. c., ce qui, avec la quantité d'acide chlorhydrique

---

[1]) J'ai déjà montré, en 1868, qu'en saturant le sérum du sang avec Cl Na on peut en précipiter beaucoup plus de paraglobuline que par la neutralisation. Voir: *Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium der Leidsche Hoogeschool*, t. I, p. 126, et Pflüger's *Archiv*, t. II, p. 26.

$\frac{1}{10}$ normal employée pour la neutralisation, donnait respectivement 33 et 29 c. c.

Sérum sanguin neutralisé.

Quantité de matière solide = Albumine.	Cendres.	Sels sol.	Sels insol.	pour 100 de matière solide. Cendres.	sol.	insol.
1. 1,6052	0,0071	0,0019	0,0052	0,44	0,10	0,32
2. 1,4809	0,0075	0,0010	0,0065	0,50	0,06	0,43
3. 0,8129	0,0040			0,49		
4. 1,0453	0,0047			0,45		
5. 1,5341	0,0081	0,0017	0,0064	0,52	0,11	0,41

Blanc d'œuf neutralisé.

Quantité de matière solide. = Albumine.	Cendres.	pour 100 de mat. sol.
6. 1,293	0,0061	0,47
7. 1,629	0,0093	0,57
8. 1,029	0,0056	0,51

Chauffés lentement, ces liquides se troublaient déjà à 50°—55°. Dans aucune des cinq expériences avec le sérum sanguin, il ne se produisait de coagulation en flocons quand on chauffait lentement au bain-marie; dans 1 et 4 seulement, cette coagulation avait lieu lorsque le liquide était chauffé directement sur la flamme. Dans les trois expériences avec le blanc d'œuf, une coagulation en flocons, plus ou moins complète, était déterminée même par l'échauffement lent au bain-marie.

L'acide carbonique, ou un autre acide faible (on employait des solutions normales étendues de 100—1000 fois leur volume d'eau) ne produisaient, avant l'ébullition, aucun précipité dans ces liquides. Après l'ébullition, les acides donnaient lieu à un précipité abondant, qui pour le blanc d'œuf ne se dissolvait pas dans les solutions salines étendues, et pour le sérum ne s'y dissolvait qu'imparfaitement.

Dans les expériences 1, 2 et 5 avec le sérum, on trouvait

encore dans les cendres, en les épuisant par l'eau, une petite quantité de sels solubles à réaction neutre; dans les expériences 3 et 4 avec le sérum, et dans les expériences 6, 7 et 8 avec le blanc d'œuf, l'eau n'enlevait aux cendres aucune quantité pondérable de sels solubles.

Ces résultats sont semblables à ceux obtenus en dernier lieu par M. Schmidt [1]), à cela près que j'ai vu le blanc d'œuf se coaguler par la chaleur, tandis que M. Schmidt n'a observé qu'une forte opalescence. Pour le sérum, toutefois, nos résultats sont identiques, et je m'en tiendrai donc à ceux-là.

M. Schmidt nous apprend, dans la communication susdite, que le papier-parchemin de De La Rue, qu'il avait recommandé comme meilleur pour la dialyse que le papier primitif employé par M. Aronstein, n'était pas du papier-parchemin, mais du papier à la colle-forte [2]). Après avoir constaté que la dialyse se fait beaucoup plus rapidement à travers une mince couche de colle qu'à travers le papier-parchemin, il a exécuté ses expériences avec du papier préparé par lui-même, au moyen d'une solution contenant 1 pour cent de colle-forte. Le papier collé, ainsi obtenu, a le désavantage de laisser passer beaucoup d'albumine, de sorte que les solutions albumineuses deviennent de plus en plus étendues à mesure que la dialyse est continuée plus longtemps; mais c'est là un inconvénient auquel M. Schmidt attachait peu d'importance, attendu qu'il voulait seulement déterminer les proportions relatives d'albumine et de sels.

Ayant reconnu, sans doute, qu'avec les solutions albumineuses non neutralisées l'élimination de la soude par la dialyse ne marchait pas très bien, il neutralisait ses solutions „à peu près" par l'acide chlorhydrique, après quoi il en dialysait, à

---

[1]) Pflüger's *Archiv*, t. XI, p. 1, 1875.

[2]) M. Schmidt se trompe en supposant que le papier de De La Rue, avec lequel j'ai opéré, était également du papier collé. Ce papier, que M. le professeur Rutherford a eu la bonté de m'envoyer de Londres, n'est pas le même que celui que M. Schmidt a reçu de Hambourg. Il ne porte pas la marque de De La Rue, et ne renferme pas de colle-forte, mais bien de l'acide sulfurique.

travers le papier collé, la même quantité que moi; mais, se servant de ses dialyseurs ordinaires, dont le fond ne mesurait que 50 cm. carrés, il opérait avec une surface dialysante plus de deux fois moindre que la mienne, à quoi il faut ajouter que dans ses expériences la paraglobuline précipitée doit avoir agi comme un obstacle.

En un temps étonnamment court, M. Schmidt a de cette manière vu disparaître *complétement* les sels solubles, par conséquent aussi la soude, qui, vu la neutralisation *imparfaite* de ses solutions, devait nécessairement y exister. Les liquides ainsi obtenus devenaient, à mesure que la dialyse avait été continuée plus longtemps, de plus en plus opalescents par la chaleur, et ils finissaient même par se troubler tellement qu'une forte dilution, par 8—10 volumes d'eau, permettait seule de constater qu'il s'agissait simplement d'un haut degré d'opalescence; quant à une coagulation en flocons, M. Schmidt ne l'a pas observée, à moins qu'une certaine quantité d'acide — un minimum est déjà suffisant — ne fût ajoutée.

Ne doit-on pas en conclure qu'il n'y avait plus d'alcali et que l'albumine, comme le prétend M. Schmidt, est réellement soluble dans l'eau, même à la température de l'ébullition? Si la non-coagulation de ces liquides dialysés dépendait de la présence de la soude, ne devrait-on pas trouver cette soude dans les cendres, à l'état de carbonate ou de sulfate de soude, par conséquent à l'état d'élément soluble?

A ces questions, la réponse de M. Schmidt est décidément affirmative, la mienne décidément négative, — et je crois que la vérité se trouve de mon côté. Rien n'est plus facile que de donner une série de dosages de cendres, mais, pour qu'ils aient quelque valeur sous le rapport quantitatif, bien des conditions sont à remplir.

Une première exigence, c'est qu'ils ne portent pas sur de trop petites quantités. Or M. Schmidt paraît avoir si peu songé

---

[1]) *Beiträge z. Anat. u. Physiol.*, p. 105.

à l'importance de cette condition, qu'il n'a même pas suivi la bonne et vieille coutume de dire combien de matière il a brûlé et combien de cendres il a trouvé; il mentionne seulement la composition centésimale qui résulte de ses dosages. A l'aide de cette indication, toutefois, on peut suppléer à son silence.

M. Schmidt dialysait toujours 25 c. c. de la solution albumineuse [1]). Prenons le cas le plus favorable, celui où il aurait brûlé toute cette quantité, — ce qui n'a pas eu lieu, car il a employé au moins une couple de c. c. pour constater si le liquide était ou non „coagulable"; — on peut alors déduire, de la composition centésimale donnée, combien d'albumine il a brûlé et combien de cendres il a obtenu. La première de ces deux quantités, toutefois, ne représente pas l'albumine qui se trouvait à l'état dissous, puisque, d'après les indications mêmes de M. Schmidt, la proportion d'albumine donnée comprend à la fois l'albumine et la paraglobuline. Pour faire un calcul exact, il faut donc retrancher de cette proportion celle de la paraglobuline précipitée. Dans la dialyse du sérum de vache neutralisé, cette proportion de paraglobuline s'élève certainement en moyenne à 1,6 pour cent, comme je le montrerai plus loin. La quantité d'albumine, qui d'après la composition centésimale donnée existait encore après la dialyse dans 25 c. c., doit donc être diminuée pour le sérum neutralisé de $\pm$ 0,4 gr., et pour le sérum non neutralisé d'au moins 0,2 gr., si l'on veut avoir la quantité d'albumine dissoute, qui seule nous intéresse. Pour le liquide hydrocélien je ne puis faire cette correction, attendu que la proportion de paraglobuline n'y est pas connue. Pour le blanc d'œuf je dois la négliger aussi, ne sachant pas au juste combien de paraglobuline il contient en moyenne. Pour le sérum sanguin seul je placerai donc, en regard des nombres réellement obtenus par M. Schmidt, ceux qu'il aurait trouvés s'il avait séparé par

---

[1]) Il dit (Pflüger's *Archiv*, XI, p. 15) avoir toujours dialysé 25 c. c. de liquide. Comme il neutralisait ses liquides, la quantité de la solution albumineuse était nécessairement encore plus petite.

la filtration, comme je l'ai fait, la paraglobuline précipitée. Voici maintenant les dosages de M. Schmidt:

	Quantité d'albumine en 25 c. c. I.	Quantité probable d'albumine dissoute. II.		Quantité de cendres trouvée par M. Schmidt.	Calculé en centièm. d'après I.	d'après II.
1	0,9789	(Liquide d'hydrocèle)	—	0,0025	0,25	—
2	0,8295	(Sérum sanguin)	0.6295	0,0054	0,66	0,85
3	0,8747	(Sérum sang. neutralisé...	0,4747	0,0015	0,17	0,31
4	0,5162	(Sérum sang. non neutralisé)	0,1162	0,0010	0,19	0,86
5	0,6465	(Blanc d'œuf).....	—	0,0030	0,46 [1])	—
6	0,5430	(Blanc d'œuf).....	—	0,0027	0,46 [1])	—

La différence entre les nombres corrigés et non corrigés est, comme on le voit, très grande; mais, sans y insister davantage, je m'en tiens aux chiffres tels qu'ils ont été réellement obtenus par M. Schmidt. Or, croit-on sérieusement que le produit en cendres d'une matière puisse être déduit de dosages portant sur 1—3 milligrammes? Les pesées des creusets de platine fournissent-elles donc des chiffres si constants?

Ce sont là les désavantages du papier à la colle, tant prôné par M. Schmidt. La dialyse marche beaucoup plus rapidement avec ce papier qu'avec le papier-parchemin, mais ce ne sont pas seulement les sels qui diminuent, la proportion d'albumine s'abaisse aussi très notablement, et la coagulabilité des solutions décroît, à la fois par la diminution des sels, — comme avec le papier-parchemin [2]), — et par l'abaissement de la teneur en albumine. Si M. Schmidt avait continué encore un peu plus longtemps ses dialyses avec le papier à la colle, il n'aurait plus trouvé de sels du tout, pas plus de sels insolubles que de sels solubles,

[1]) Ces chiffres sont naturellement aussi trop faibles, puisque, de même que pour le sérum sanguin, la paraglobuline devrait être retranchée de la proportion d'albumine pour avoir un résultat net. L'influence de cette correction est toutefois moindre ici, parce que le blanc d'œuf contient moins de paraglobuline que le sérum du sang.

[2]) Le papier-parchemin dont je me sers ne laisse passer que des traces d'albumine, de sorte que par la dialyse on peut doser l'albumine des liquides plus exactement que par aucune autre méthode; c'est ce que j'ai déjà montré dans une communication précédente.

et il serait ainsi revenu au point d'où il était parti primitivement avec M. Aronstein.

La quantité de matière sur laquelle M. Schmidt a exécuté ses dosages est donc déjà trop petite pour nous faire connaître la proportion totale des cendres de l'albumine dialysée. Mais, voulût-on passer par-dessus cette objection, ce serait en tout cas aller trop loin que de vouloir encore déduire, de si petites quantités de cendres, le rapport des éléments solubles et des éléments insolubles. On obtient des chiffres, — mais dénués de toute valeur. Aussi est-il à remarquer que, dans tous ces dosages, M. Schmidt trouve variablement 0, — résultat auquel les pesées conduisent bien rarement.

Pour décider le litige, on devrait donc, en premier lieu, pouvoir disposer de quantités beaucoup plus grandes d'albumine dialysée aussi complétement que possible. Mais, de *grandes* quantités d'albumine et une dialyse *complète* sont deux choses très difficiles à réunir, l'expérience l'a appris. D'ailleurs, y parvînt-on, la question ne serait pas tranchée. Supposons que, la dialyse terminée, on n'observe pas de coagulation en flocons, et que, après incinération d'une suffisante quantité de matière et traitement des cendres par l'eau, on ne trouve pas du tout de sels solubles. En résulterait-il qu'il n'y avait plus de soude dans la matière et que l'albumine est une espèce albumineuse ne se coagulant pas par la chaleur? Pas le moins du monde. Rose a montré en effet, il y a déjà longtemps [1]), que lorsqu'on calcine des alcalis avec des phosphates terreux il se forme des combinaisons doubles insolubles, et MM. Behaghel [2]) et Bunge [3]) ont trouvé que, parmi les alcalis, c'est surtout la soude qui entre dans ces combinaisons [4]). M. Bunge a fait voir que, des 0gr.,1862

[1]) Pogg. *Annalen*, t. LXXVI et LXXVII.

[2]) *Ueber die Bestimmung des Chlors und der Alkalien in vegetab. u. animal. Subst.* Fresenius' *Zeitschrift*, 12e année.

[3]) *Ueber den Natrongehalt der Pflanzenaschen.* Liebig's *Annal.*, t. CLXXII.

[4]) Carboniser la matière à basse température et traiter le charbon par l'eau, comme l'a fait M. Huizinga, est un procédé auquel on ne peut pas se fier; on sait, en effet, que l'eau n'enlève pas au charbon toutes les matières solubles.

NaO qui étaient contenus dans 300 c.c. de lait, 0gr.,1162 provenaient des éléments insolubles des cendres, tandis que les éléments solubles n'avaient fourni que 0gr.,070, de sorte que, „dans certaines cendres (contenant du phosphate de chaux) la présence de la soude peut être constatée beaucoup plus sûrement dans la partie insoluble que dans la partie soluble." [1])

Un instant j'avais eu le projet de doser la soude dans la partie insoluble des cendres, mais j'y ai renoncé. D'une part, parce que la quantité de cendres dont on pourrait disposer serait toujours relativement petite, et par suite ne donnerait pas, vu la complication de l'analyse [2]), des résultats inspirant une entière confiance; d'autre part, parce que j'ai appris à connaître des phénomènes qui tranchent la question beaucoup plus sûrement que le dosage des cendres ne pourrait le faire dans le cas le plus favorable, et qui rendent par conséquent ce dosage entièrement superflu.

J'ai déjà montré antérieurement que de très petites quantités d'alcali ou d'acide sont capables de maintenir en solution l'albumine de liquides albumineux dialysés (pauvres en sels), mais je n'avais pas encore étudié quantitativement cette solubilité. Maintenant qu'il était prouvé que la quantité d'alcali — si, comme je le croyais, il en existait encore dans les solutions albumineuses qui ne se congulent pas à la température de l'ébullition — peut être tellement petite qu'on parvient à peine à la déceler par le dosage des cendres, j'ai jugé nécessaire d'examiner si des quantités

[1]) Il est à remarquer que M. Schmidt songe bien aux résultats obtenus par M. Behaghel quand il s'agit du dosage des sels solubles et insolubles de sa solution de colle, mais les oublie complétement lorsqu'il est question des sels solubles et insolubles de l'albumine dialysée.

[2]) Il faut épuiser par l'acide chlorhydrique ou nitrique la partie des cendres qui est insoluble dans l'eau, traiter la liqueur par la baryte parfaitement exempte d'alcali, et précipiter l'excès de baryte par l'ammoniaque et le carbonate d'ammoniaque. Malgré cela, il reste un peu de baryte en solution. Après avoir chassé les sels ammoniacaux par une calcination modérée, on doit donc ajouter encore de l'acide oxalique, puis évaporer et calciner de nouveau; on sépare alors le carbonate de baryte et on dose la soude à l'état de chlorure de sodium.

d'alcali, assez faibles pour ne plus être trouvées dans ce dosage, exercent une influence sensible sur la solubilité. Le résultat a non-seulement répondu à mon attente, mais l'a de beaucoup dépassée.

En ajoutant, pour chaque c. c. de liquide, 1 c. c. de potasse $\frac{1}{1000}$ normale, j'ai vu du sérum sanguin dialysé, qui par lui-même ne se coagulait pas mais devenait fortement trouble, rester parfaitement limpide à la température de l'ébullition, tandis que du blanc d'œuf dialysé, qui avant tout mélange se coagulait en flocons par la chaleur, après l'addition de cette même quantité d'alcali devenait seulement opalescent. Cet effet fut obtenu avec de la potasse qui depuis longtemps était employée journellement dans le laboratoire, et qui était donc passée en grande partie à l'état de carbonate. En conséquence, je répétai l'expérience avec de l'alcali contenant moins d'acide carbonique, et je choisis la soude, parce que c'est l'alcali qui se trouve dans les solutions albumineuses naturelles. Je donne ci-dessous les résultats obtenus, en y ajoutant le calcul de la quantité de sels solubles qu'on pourrait trouver, soit à l'état de carbonate de soude, soit à l'état de sulfate de soude, si l'on brûlait 25 c. c. des solutions en question.

Ajouté par c. c.	Quantité en grammes.	Sérum sanguin.	Blanc d'œuf.	Cendres pour 25 c.c.	
				Calc. comme Na_2CO_3	Calc. comme Na_2SO_4
0		trouble.	entièr. coagulé		
$\frac{1}{10}$ c. c. de soude $\frac{1}{1000}$ norm.	0,0000031	opalescent.	trouble.	0,00013	0,00017
$\frac{2}{10}$ " " " " "	0,0000062	légèr. opalescent.	opalescent.	0,00026	0,00034
$\frac{4}{10}$ " " " " "	0,0000124	limpide.	id.	0,00052	0,00068
1 " " " " "	0,000031		légèr. opalescent.	0,0013	0,0017
2 " " " " "	0,000062		limpide.	0,0026	0,0034

Nous pouvons négliger les deux dernières déterminations, attendu que les solutions dialysées d'albumine d'œuf, pour lesquelles j'ai

dosé les cendres, montraient toujours un beaucoup plus haut degré d'opalescence que celles dont il s'agit ici. Mais en considérant les trois premières déterminations, personne ne s'étonnera plus qu'on ne trouve pas de sels solubles dans les cendres.

Les acides se comportent de la même manière. Il n'en faut qu'une très petite quantité pour dissoudre l'albumine des solutions albumineuses dialysées. Cela est vrai surtout des acides énergiques.

Les chiffres suivants mettent en évidence l'action de l'acide chlorhydrique :

Ajouté par c. c.					Sérum sanguin.	Blanc d'œuf.
$\frac{2}{10}$	c. c. d'acide	$\frac{1}{100}$	norm.		Coagulé.	Coagulé.
$\frac{4}{10}$	"	"	"	"	id.	id.
$\frac{5}{10}$	"	"	"	"	id.	opalescent.
$\frac{6}{10}$	"	"	"	"	opalescent.	limpide.
$\frac{7}{10}$	"	"	"	"	limpide.	id.

Pour le sérum, nous trouvons donc une solubilité parfaite à la température de l'ébullition après avoir ajouté $\frac{4}{10}$ c. c. de soude $\frac{1}{100}$ normale, d'une part, et $\frac{7}{10}$ c. c. d'acide chlorhydrique $\frac{1}{100}$ normal, d'autre part. Pour le blanc d'œuf, le même résultat est obtenu soit avec $\frac{2}{10}$ c. c. de soude $\frac{1}{100}$ normale, soit avec $\frac{6}{10}$ c. c. d'acide chlorhydrique $\frac{1}{100}$ normal.

Ainsi, de minimes proportions d'alcalis et d'acides sont capables de maintenir en solution, à la température de l'ébullition, l'albumine des solutions albumineuses dialysées. En deçà des limites indiquées, nous voyons le liquide albumineux se coaguler quand on le chauffe, et à mesure qu'il se rapproche des deux points extrêmes, nous constatons une opalescence de moins en moins prononcée. La seule explication possible n'est-elle pas: *que les solutions albumineuses, lorsqu'elles sont vraiment neutres, se coagulent à la chaleur de l'ébullition, et que la non-coagulation de l'albumine dialysée tient à l'élimination imparfaite de l'alcali?*

Pour moi, la question est jugée et je ne m'en occuperai pas davantage.

Mes conclusions sont donc:

1°. Qu'après la dialyse la plus complète on obtient une *combinaison d'albumine* avec du phosphate de chaux (et de magnésie), qui est soluble dans l'eau, mais dont la solution réellement neutre abandonne l'albumine, sous la forme coagulée, à la température de l'ébullition [1]).

2°. Qu'il n'est pas possible d'obtenir par la dialyse de l'albumine privée de sels, et qu'on n'a donc pas le droit de déclarer l'albumine une espèce albumineuse soluble dans l'eau.

3°. Que la combinaison susdite, au moins dans le sérum sanguin, est encore mêlée, même après une dialyse énergique, avec une petite quantité d'albumine unie à de la soude, alcali qui empêche plus ou moins complétement, suivant qu'il est en quantité plus ou moins grande, la coagulation par la chaleur de cette albumine et de celle qui est combinée avec le phosphate de chaux.

Combinaison de l'albumine du sérum et de l'œuf avec le phosphate de chaux et de magnésie.

A ma communication antérieure concernant les propriétés de cette combinaison je puis ajouter ce qui suit:

1. Elle est décomposée par les alcalis et les acides, et l'albumine reste alors dissoute. Avec l'aide de la chaleur, de très petites quantités des susdits agents suffisent déjà à opérer cette décomposition. C'est pour cela que, lorsqu'on a ajouté une petite quantité d'alcali ou d'acide, l'albumine n'est pas précipitée quand

[1]) Jusqu'à présent je n'ai pu constater dans cette *combinaison d'albumine* que la présence du phosphate de chaux (et de magnésie), et je la décris en conséquence. Mais je ne veux nullement contester la possibilité qu'il s'y trouve, outre le phosphate de chaux, d'autres éléments jusqu'ici inconnus, ce qui ferait rentrer cette combinaison dans la catégorie des matières albuminoïdes dites composées, telles que la vitelline et autres corps analogues. *Je crois, au contraire, que cela est très probable.*

on neutralise avant de faire bouillir, tandis qu'après l'ébullition un précipité est produit par la neutralisation. La décomposition n'est pas influencée seulement par la quantité absolue d'alcali (ou d'acide) et d'albumine, mais aussi par le degré de concentration des solutions. Pour la même quantité d'albumine, il faut d'autant plus d'alcali (ou d'acide) que le liquide est plus étendu.

2. *Elle a une réaction acide.* J'avais fait cette observation depuis longtemps, mais sans oser m'y fier, parce que dans mes premières dialyses la réaction acide n'apparaissait qu'après une longue durée de l'expérience et pouvait dépendre de l'une ou l'autre transformation des matières albuminoïdes. Plus tard, avec les liquides incomplétement neutralisés, je vis cette réaction acide se produire au bout de 24 heures. Ici, toutefois, il était possible qu'elle fût déterminée de l'une ou de l'autre manière par l'acide ajouté. J'ai donc jugé utile d'opérer sur du blanc d'œuf et du sérum sanguin non modifiés, à l'état naturel, et pour couper court à toute crainte de putréfaction, j'ai dialysé 10 c. c. de ces liquides avec deux fois plus d'eau que je n'en emploie habituellement. Au bout de 24 heures, le papier de tournesol était déjà légèrement coloré en rouge; après 2 × 24 heures, il y avait une réaction acide très nette.

3°. Il est difficile de décider si l'albumine du sérum et celle de l'œuf diffèrent l'une de l'autre quant à leur solubilité dans les alcalis et les acides. Il ne suffit pas de comparer sous ce rapport des solutions également riches en albumine, car l'albumine de l'œuf paraît être unie à plus de phosphate de chaux que l'albumine du sérum, et nous montrerons plus loin que l'influence des alcalis et des acides est notablement diminuée par la présence de sels. La différence de solubilité n'est certainement pas grande. Il y a toutefois, comme nous le verrons, d'autres différences, qui conduisent à regarder les deux espèces d'albumine comme différentes.

4. Chauffée, la combinaison est déjà décomposée partiellement à une température peu élevée. Mes dialyses avec l'eau zincifère laissaient finalement une combinaison albumineuse qui se décom-

posait en partie dès qu'elle était portée à 30° ou 40°; l'albumine déposée se trouvait à l'état non coagulé (Voir: *Onderzoekingen gedaan in het Phys. Lab. der Leidsche Hoogeschool*, t. III, p. 163).

Dans mes expériences avec l'eau distillée, j'ai observé le même phénomène. Le liquide, qui d'abord restait limpide à la température de l'ébullition, devenait ensuite susceptible de se troubler à 80°, à 70°, à 60° et finalement, après une dialyse très prolongée, même à 50°. Au-dessous de cette température, je n'ai pas vu se produire de trouble en dialysant avec l'eau distillée. Cette différence est-elle due à une proportion moindre de phosphate de chaux dans la combinaison, ou à une proportion moindre d'alcali resté dans la liqueur? Ou bien l'infériorité de la température à laquelle a lieu la précipitation lorsqu'on dialyse avec l'eau zincifère tient-elle à la présence du zinc dans la solution albumineuse? Ce sont des questions auxquelles je ne puis répondre. L'albumine qui a été précipitée par une courte application d'une chaleur de 50° à 60° se redissout dans la liqueur après le refroidissement, et n'est donc pas coagulée.

5. Ce n'est pas seulement par l'addition de très petites quantités d'alcali ou d'acide qu'on peut faire croître la température à laquelle le liquide se trouble; on y parvient aussi au moyen des sels neutres. Par l'addition de 16 pour cent de ClNa à une solution albumineuse qui avant le mélange se troublait à 55°, la température à laquelle le trouble se manifestait a pu être portée à 84° pour l'albumine du sérum et à 70° pour l'albumine de l'œuf, tout comme je l'avais observé antérieurement pour le produit de la dialyse avec l'eau zincifère. (Voir *Onderzoekingen*, t. III, p. 164).

6. Entre l'albumine qui se dégage de cette combinaison sous l'influence des alcalis, et l'albumine alcalifère des solutions albumineuses naturelles, il n'existe pas de différence. Cette proposition résulte des phénomènes que j'ai observés dans l'étude systématique de l'influence des alcalis sur l'albumine, phénomènes que je vais maintenant faire connaître.

Action des alcalis sur l'albumine du sérum et de l'œuf.

M. Lieberkühn nous a appris que les alcalis concentrés transforment à la température ordinaire l'albumine de l'œuf en albuminate alcalin, et M. Lehmann a montré que la même transformation est opérée aussi par les alcalis étendus, surtout quand ils agissent longtemps ou quand la température est élevée à 40°. On savait de plus que l'albumine, tant celle du sérum que celle de l'œuf, est dissoute par les alcalis à la température de l'ébullition, mais on croyait généralement que, dans le premier cas comme dans le second, cette transformation impliquait toujours le passage de l'albumine à la forme coagulée.

Mes premières dialyses, faites avec de l'eau distillée, et avec du sérum sanguin et du blanc d'œuf non neutralisés, avaient donné un résultat conforme à cette opinion: de tous les deux, après ébullition — et refroidissement, bien entendu, — j'avais obtenu par l'acide carbonique un précipité qui était insoluble dans les solutions salines étendues. Dans mes dialyses postérieures, plus complètes et où en outre la plus grande partie de l'alcali des solutions albumineuses naturelles avait été éliminée par la neutralisation, les choses ne se passèrent plus ainsi: pour l'albumine du sérum, au moins, je trouvai qu'après l'ébullition, lorsque le liquide albumineux restait limpide pendant cette opération, l'albumine était précipitée par un acide sous la forme soluble, non coagulée. Lorsque la dialyse était poussée plus loin, et que l'ébullition rendait le liquide opalescent ou trouble, le précipité occasionné par les acides devenait de nouveau de moins en moins soluble.

Mes recherches antérieures (*Onderzoekingen* etc., t. III, p. 182) avaient appris que les albuminates alcalins, formés à la température ordinaire au moyen de solutions albumineuses pauvres en sels, diffèrent entre eux suivant le degré de concentration de l'alcali employé. Nous venons de voir maintenant, qu'en présence

de petites quantités d'alcali la chaleur de l'ébullition même peut être supportée, sans que se perde la solubilité dans les solutions salines neutres. Il y avait donc tout lieu d'espérer qu'un examen systématique de l'action exercée par les alcalis pourrait mettre au jour des faits intéressants.

Avant de communiquer les résultats obtenus dans cette direction, je dois présenter quelques remarques au sujet de la coagulation de l'albumine.

Nous appelons habituellement albumine non coagulée celle qui, après avoir été précipitée d'une combinaison, se dissout dans les solutions salines neutres, et nous mesurons le degré de sa solubilité par le contenu en sels du liquide dans lequel la dissolution s'effectue. La paraglobuline, la myosine et la fibrine sont désignées comme de l'albumine non coagulée, mais la paraglobuline est dite plus soluble que la myosine et la fibrine, parce qu'elle se dissout dans des solutions salines moins concentrées que celles nécessaires pour dissoudre les deux autres substances. D'un autre côté, le degré de solubilité peut aussi être déduit du titre salin auquel la solution doit être portée pour que l'albumine se précipite. Pour plusieurs matières albuminoïdes naturelles ce titre est déjà connu. En ce qui concerne l'albumine unie à de l'alcali qui existe dans le plasma sanguin, M. Eichwald a montré, et M. Hammersten a confirmé [1]) qu'une partie (la matière dite fibrogène) est précipitée quand la solution renferme environ 16 pour cent de chlorure de sodium, tandis qu'une autre partie de cette albumine unie à de l'alcali (la matière appelée paraglobuline) reste dissoute dans une pareille liqueur et se sépare seulement lorsque la solution est saturée de ClNa, c'est-à-dire, lorsqu'elle contient 32 pour cent de sel. La myosine se dissout le mieux dans un liquide renfermant 7—10 pour cent de chlorure de sodium.

J'ai constaté que l'une comme l'autre de ces deux méthodes peut généralement servir à déterminer le degré de la solubilité. Lorsqu'il y a peu de solubilité dans les solutions salines faibles, on trouve

[1]) *Untersuchungen über die Faserstoffgerinnung*, Upsala, 1875.

que la dissolution ne s'effectue pas non plus, ou ne s'effectue que d'une matière incomplète, dans les liquides très concentrés, tandis qu'avec les degrés moyens de concentration on obtient encore une dissolution totale ou moins incomplète. C'est dans un liquide au titre d'environ 4 pour cent de Cl Na que la dissolution de la matière, en cas de solubilité décroissante, continue le plus longtemps à se faire.

L'albumine est dite coagulée lorsqu'elle n'est pas soluble dans les solutions salines neutres; mais on distingue différents degrés de coagulation. Il y a de l'albumine qui est insoluble dans les solutions neutres, quelle que soit leur teneur en sel, mais qui est dissoute par de petites quantités d'alcali ou d'acide; d'autre part, nous connaissons de l'albumine coagulée qui est insoluble, non-seulement dans les solutions salines de tout titre, mais aussi dans les alcalis et acides étendus, et qui se dissout seulement sous l'influence des alcalis et acides concentrés.

A proprement parler, il faut donc distinguer quatre degrés de solubilité (outre les passages entre ceux-ci):

1. Solubilité dans les solutions salines neutres de tout titre.
2. " " " " " " d'un degré moyen de concentration.
3. " " " alcalis et acides étendus.
4. " " " " " " concentrés.

Dans ce qui suit, je m'occupe principalement des trois premiers degrés de solubilité, qui pour la physiologie sont les plus importants.

Lorsque du sérum sanguin dialysé est bouilli avec des quantités croissantes d'alcali, on trouve que l'albumine du sérum parcourt tous ces divers degrés de solubilité.

Pour obtenir dans ces expériences des résultats comparables entre eux, je mélangeais toujours l'alcali employé avec juste assez d'eau (ou d'une solution de sel, ce dont il sera question plus loin) pour que le mélange occupât 18 c. c., après quoi j'ajoutais 2 c. c. de la solution d'albumine. Les solutions albumineuses étaient donc toujours étendues à 10 fois leur volume.

Comme sérum sanguin, j'employais du sérum dialysé, qui, chauffé lentement au bain-marie, ne se coagulait pas en flocons, mais se troublait fortement. Après l'ébullition et le refroidisse-

ment, j'ajoutais de l'acide acétique ($\frac{1}{100}$ normal) jusqu'à réaction acide faible, puis la liqueur, y compris le précipité, était mêlée avec un volume égal d'une solution de chlorure de sodium d'un titre double de celui qui est indiqué dans le tableau suivant:

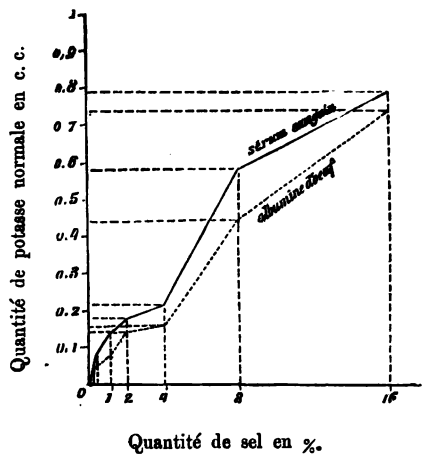
Quantité d'alcali ajouté à 20 c. c.	Chlorure de sodium en centièmes.					
	0,5	1	2	4	8	16
0	trouble	trouble	trouble	trouble	trouble	trouble
1 c. c. potasse $\frac{1}{100}$ norm.	limpide	limpide	limpide	limpide	limpide	limpide
2 " " " "	opalin	opalin	"	"	"	opalin
3 " " " "	trouble	trouble	opalin	"	opalin	trouble.

On voit donc que l'albumine du sérum sanguin peut être bouillie avec de la potasse sans perdre sa solubilité dans les solutions de chlorure de sodium, mais que cette solubilité diminue de plus en plus à mesure que la quantité d'alcali augmente; le trouble qui, dans le liquide bouilli sans mélange, persistait après la neutralisation et le traitement par Cl Na, montre d'ailleurs que l'albumine était réellement coagulée en partie.

Ce résultat ne fut pas seulement obtenu avec l'albumine du sérum, mais aussi avec celle de l'œuf. Ici, toutefois, se présentaient des circonstances qui rendaient l'appréciation plus difficile. Pour précipiter l'albumine, j'ajoutais au blanc d'œuf dialysé, comme je l'avais fait au sérum, de l'acide acétiqne $\frac{1}{100}$ normal, jusqu'à ce que la réaction fût acide. Le liquide ainsi neutralisé étant alors mêlé avec les solutions de sel à différents titres, on observait les mêmes phénomènes qu'avait offerts le sérum sanguin. Mais je reconnus bientôt que le blanc d'œuf traité de cette manière ne pouvait en réalité être dit neutralisé: la solution albumineuse avait déjà une réaction acide avant de contenir de l'acide libre, probablement parce que, pendant l'ébullition, l'alcali existant avait déterminé la formation de phosphate de potasse, qui exerce, on le sait, une grande influence sur la solubilité de l'albumine. Plus loin, je reviendrai sur cette question.

J'avais observé que *l'action des acalis sur l'albumine est entravée par les sels*, et je cherchai donc, en premier lieu, combien il fallait de c. c. de ma solution de potasse pour maintenir l'albumine dissoute en présence de 0—16 pour cent de chlorure de sodium. Les résultats de ces exépriences sont représentés graphiquement dans la fig. 1.

Fig 1.



On le voit, tandis que, pour la quantité d'albumine et le degré de concentration donnés, 1 c. c. de ma solution de potasse $\frac{1}{100}$ normale — solution qui peu à peu s'était transformée en grande partie, comme cela est inévitable, en carbonate de potasse — suffisait à tenir l'albumine dissoute quand la liqueur dialysée ne renfermait pas de sel, cette même quantité d'albumine exigeait, pour rester dissoute en présence de 16 pour cent de Na Cl, environ 80 fois plus de potasse.

La soude agit de la même manière. Quant à savoir s'il existe entre la potasse et la soude quelque différence sous le rapport de l'intensité de l'action, c'est ce que je ne saurais décider. Dans mes expériences, la soude opérait avec plus de force; mais ma solution de soude était préparée récemment, et par conséquent beaucoup plus caustique que la solution de potasse, qui, servant depuis longtemps, s'était affaiblie par l'absorption d'acide carbonique. En employant de la potasse caustique, on la verra donc agir avec plus d'énergie que dans mes expériences; il est probable que l'action de la soude sera alors trouvée un peu plus plus faible que celle de la potasse.

Avec les proportions données d'alcali et de sel, l'albumine n'est pas seulement maintenue en solution, elle reste aussi à

l'état non coagulé. J'ai constaté ce fait en premier lieu sur le sérum sanguin. Lorsqu'on fait bouillir du sérum ordinaire de vache, bien séparé du caillot et étendu de 9 volumes d'eau, le liquide reste en général parfaitement limpide [1]), et après le refroidissement on obtient par l'acide carbonique, ou par d'autres acides faibles, un précipité qui est *complétement* soluble dans les solutions étendues de chlorure de sodium.

On n'a donc pas besoin de liquides dialysés pour étudier le phénomène. Les solutions albumineuses naturelles conviennent tout aussi bien, et même encore mieux, parce que les limites sont élargies par la présence des sels dans les liquides naturels.

Relativement à ces solutions albumineuses naturelles, j'ai déterminé d'abord combien il fallait d'acide pour la précipitation. L'expérience m'a appris que, si 2 c. c. de sérum sanguin sont étendus de 18 c. c. d'eau, 9 c. c. d'une solution d'acide acétique $\frac{1}{100}$ normal suffisent pour précipiter l'albumine, et que, si l'on mêle ce même liquide avec des quantités croissantes de potasse, la précipitation a également lieu quand on ajoute une quantité d'acide croissant dans le même rapport que la quantité de potasse. Dans les expériences dont le tableau est donné ci-dessous, la quantité indiquée d'acide ou d'alcali était étendue d'eau jusqu'au volume de 18 c. c., après quoi on ajoutait 2 c. c. de sérum sanguin naturel et on faisait bouillir. L'aspect du liquide après l'ébullition est donné dans la seconde colonne du tableau. Après le refroidissement, on précipitait la liqueur par la quantité indiquée d'acide normal, puis on y ajoutait un volume égal d'une solution à 8 pour cent de chlorure de sodium, de sorte que, dans le mélange, la proportion de ce sel était de 4 pour cent. La quatrième colonne fait connaître l'aspect du liquide après cette addition d'acide et de Cl Na.

---

[1]) Quelquefois j'ai vu se produire une légère opalescence à la suite de l'ébullition du liquide. Pour une même espèce animale — je n'employais que du sérum de vache — la proportion d'alcali contenu dans le sérum ne paraît donc pas être toujours exactement la même.

Quantité d'acide ou d'alcali.	Aspect du liquide après l'ébullition.	Acide ajouté pour la neutralisation.	Aspect du liquide après add. de ClNa à 8 %, c. à d. mêlé avec 4 % ClNa.
6 c. c. d'ac. acét. $\frac{1}{100}$ norm.	Coagulé	$\frac{3}{10}$ c. c. d'ac. acét. $\frac{1}{10}$ norm.	trouble
5 " " " " "	trouble	$\frac{4}{10}$ " " " " "	opalescent
4 " " " " "	opalescent	$\frac{5}{10}$ " " " " "	"
3 " " " " "	"	$\frac{6}{10}$ " " " " "	"
2 " " " " "	"	$\frac{7}{10}$ " " " " "	"
1 " " " " "	faibl. opalescent	$\frac{8}{10}$ " " " " "	limpide
0 " " " " "	limpide	$\frac{9}{10}$ " " " " "	"
1 c. c. de potasse $\frac{1}{100}$ norm.	"	1 " " " " "	"
2 " " " " "	"	$1\frac{1}{10}$ " " " " "	"
3 " " " " "	"	$1\frac{2}{10}$ " " " " "	"
4 " " " " "	"	$1\frac{3}{10}$ " " " " "	"
5 " " " " "	"	$1\frac{4}{10}$ " " " " "	"
6 " " " " "	"	$1\frac{5}{10}$ " " " " "	"
7 " " " " "	"	$1\frac{6}{10}$ " " " " "	opalescent
8 " " " " "	"	$1\frac{7}{10}$ " " " " "	"
9 " " " " "	"	$1\frac{8}{10}$ " " " " "	"
10 " " " " "	"	$1\frac{9}{10}$ " " " " "	"
11 " " " " "	"	2 " " " " "	"
12 " " " " "	"	$2\frac{1}{10}$ " " " " "	trouble
13 " " " " "	"	$2\frac{2}{10}$ " " " " "	précip. floconneux

Le sérum sanguin naturel contient, par c. c., une quantité d'alcali équivalente à 4 c. c. d'alcali $\frac{1}{100}$ normal; j'ajoutais donc, sur les 2 c. c., 1 c. c. d'acide acétique $\frac{1}{100}$ normal en excès, c'est-à-dire, pour une même quantité d'albumine, toujours un même excès d'acide.

Quand le chlorure de sodium est ajouté en proportion plus petite ou plus grande que 4 pour cent, le trouble apparaît plus tôt, ce qui prouve que la solubilité est alors moindre.

Si les liquides bouillis avec les quantités indiquées d'alcali sont abandonnés 24 heures à eux-mêmes avant d'être neutralisés, on trouve la solubilité diminuée. Dans ces conditions, il n'y a que les liquides bouillis avec 0, 1, 2, 3 et 4 c. c. de potasse $\frac{1}{100}$ n. qui soient complétement solubles dans Cl Na à 4 pour cent; le liquide bouilli avec 5 c. c. de potasse $\frac{1}{100}$ n. devient opalescent après l'addition de cette même proportion de Cl Na, celui avec 6 c. c. est alors précipité; quand le mélange est fait avec une solution de Cl Na à 2 pour cent, les liquides bouillis avec 0 et 1 c. c. de potasse $\frac{1}{100}$ normale restent seuls limpides, ceux avec 3 et 4 c. c. deviennent déjà opalescents.

Pour l'albumine de l'œuf les faits sont au fond les mêmes, mais beaucoup plus difficiles à constater. J'ai trouvé que cette albumine exige, pour être précipitée après l'ébullition, beaucoup plus d'acide qu'il n'en faut pour la coaguler quand on la fait bouillir directement avec l'acide. Dans ces dernières conditions, j'avais eu besoin, comme on l'a vu, de 11 à 12 c. c. d'acide chlorhydrique $\frac{1}{10}$ normal pour 50 c. c. de blanc d'œuf étendu de son volume d'eau. D'après cela, 2 c. c. de cette même solution, préalablement bouillie, ne devraient demander que 4 à 5 c. c. d'acide $\frac{1}{100}$ normal pour laisser précipiter l'albumine; mais cela n'est nullement le cas. On doit ajouter 8 à 8½ c. c. d'acide acétique ou 6½ à 7 d'acide chlorhydrique, avant que la précipitation ne s'effectue.

La raison de cette différence est, en premier lieu, qu'il faut un certain excès d'acide avant que l'alcali soit soustrait à l'albumine, qui elle-même se comporte comme un acide. Quand

on se borne à neutraliser la liqueur, il y reste encore de l'alcali, qui n'est pas décelé par la réaction, parce qu'il est uni à l'albumine. En second lieu, la quantité d'acide nécessaire est plus grande, parce que le liquide est plus étendu et que par suite l'excès en question n'est pas obtenu aussi rapidement. Enfin l'albumine de l'œuf, en particulier, exige plus d'acide pour être précipitée après l'ébullition, parce que, sous l'influence de la soude qu'elle contient et de l'alcali qu'on ajoute avant l'ébullition, il se forme probablement, à l'aide de la chaleur, du phosphate alcalin aux dépens du phosphate de chaux existant dans la matière. Ce phosphate alcalin est cause que le liquide albumineux, quand on y ajoute des acides, montre déjà une réaction acide avant de renfermer de l'acide libre, et dans ces conditions, comme on le sait, l'albumine reste dissoute. Effectivement, après l'addition de 6 c. c. d'acide acétique $\frac{1}{100}$ normal, la réaction est déjà acide, mais l'albumine ne se précipite pas encore. On doit employer au moins 8 c. c. d'acide acétique $\frac{1}{100}$ normal, pour déterminer cette précipitation.

Si maintenant, après avoir ajouté à l'albumine de l'œuf la quantité d'acide nécessaire, on mêle, soit le précipité seul, soit le le liquide tenant le précipité en suspension, avec la solution de ClNa, on trouve que l'albumine ne s'y dissout jamais, et pendant longtemps j'ai cru qu'il y avait là une différence essentielle entre l'albumine de l'œuf et celle du sérum. Mais la différence est seulement apparente, car, si l'on commence par mêler la solution d'albumine d'œuf avec la solution de sel, et qu'ensuite on ajoute la quantité d'acide nécessaire, on constate que l'albumine d'œuf, même à la température de l'ébullition, n'est pas amenée non plus à la forme coagulée par les alcalis étendus, et que la solubilité de cette albumine diminue aussi à mesure que l'action de l'alcali est plus énergique.

Action des acides sur l'albumine du sérum et de l'œuf.

Au sujet de cette action, je puis être bref. Elle est entièrement semblable à celle des alcalis. Cela ne signifie pas, il est vrai, que la matière à laquelle cette action donne naissance soit exactement la même dans les deux cas. Mais, en ce qui concerne l'influence sur la solubilité de l'albumine, il y a équivalence parfaite entre les acides et les alcalis.

Les acides forts agissent, sous ce rapport, plus énergiquement que les acides faibles. C'est ce qui apparaît le mieux avec des solutions albumineuses dialysées, où la proportion de sels (phosphate de chaux) est si petite que l'action des acides s'en trouve à peine entravée.

La coagulation de l'albumine de 2 c. c. de sérum dialysé et de 2 c. c. de blanc d'œuf dialysé, étendus jusqu'à occuper un volume 10 fois plus grand, est empêchée par les quantités suivantes d'acides normaux dilués au centième:

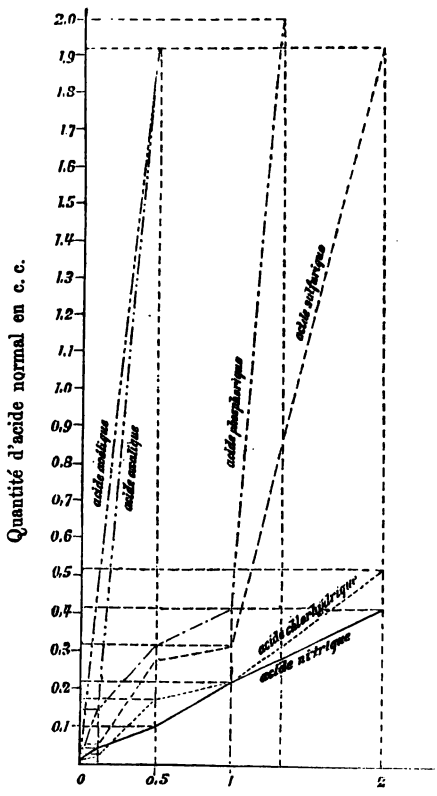
	Sérum.	Blanc d'œuf.
Acide nitrique.	2 c. c.	1,5 c. c.
„ chlorhydrique .	2 „	1,5 „
„ sulfurique . . .	2,5 „	3 „
„ phosphorique. .	2,5 „	3 „
„ oxalique	3 „	5 „
„ acétique	3 „	10 „

Le fait, que le sérum a exigé un peu plus d'acide nitrique et d'acide chlorhydrique que le blanc d'œuf, tient sans doute à ce que le sérum contenait encore une petite quantité d'alcali, dont la neutralisation a absorbé une portion de l'acide; cette influence écartée, l'albumine de l'œuf demande un peu plus d'acide que l'albumine du sérum, ce qui dépend peut-être uniquement de ce que la première de ces combinaisons renferme une plus grande quantité de phosphate de chaux.

L'action dissolvante des acides est contrariée par les sels solubles, et cet effet est le plus marqué pour les acides faibles.

En ce qui concerne le sérum sanguin, j'ai représenté cette influence graphiquement dans la fig. 2. On voit combien est grande, sous ce rapport, la différence des six acides étudiés. Ces acides étaient toujours mêlés avec une quantité telle de ClNa, que la proportion de ce sel, en 20 c. c., s'élevât au chiffre indiqué dans la figure; ensuite on ajoutait de l'eau, jusqu'à ce que le liquide occupât un volume de 18 c. c., et enfin 2 c. c. de sérum sanguin naturel.

Fig. 2.



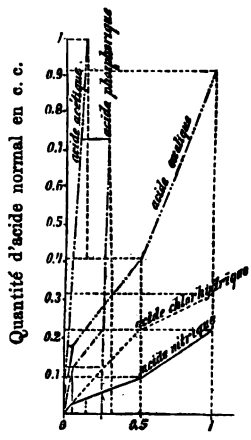
L'albumine n'est pas seulement maintenue dissoute à la température de l'ébullition par les acides, tout comme par les alcalis; elle reste aussi sous la forme non coagulée, tant que la quantité d'acide n'est pas trop grande. Cette quantité est différente pour chaque acide. Pour les acides énergiques, agissant sur une solution pauvre en sels, par exemple sur du sérum dialysé, elle est très petite, et les limites entre lesquelles on constate une solubilité plus ou moins complète dans les solutions salines neutres sont très étroites. Pour les acides faibles, en présence du sérum dialysé, cette quantité est plus grande, et surtout la solubilité persiste entre des limites beaucoup plus larges, de sorte qu'avec ces acides, pris au titre normal, on ne parvient même pas à rendre l'albumine insoluble dans les solutions salines neutres. Pour amener par l'acide acétique

l'albumine du sérum à l'état coagulé, je devais ajouter 18 c. c. d'un acide acétique qui était environ 9 fois plus concentré que l'acide normal.

A mesure que l'énergie de l'acide est moindre, l'addition de Cl Na exerce une influence plus grande. Avec 0,5 pour cent de Cl Na dans la solution albumineuse, celle-ci ne demande que 1,8 c. c. d'acide nitrique $\frac{1}{10}$ normal pour rester limpide à l'ébullition, tandis que l'acide acétique ne produit le même effet qu'à la dose de 2 c. c. d'acide normal.

L'albumine de l'œuf se comporte de la même manière, comme le montre la représentation graphique donnée dans la fig. 3; mais, cette albumine étant beaucoup plus sensible à l'action des acides, l'influence des sels n'a pu être étudiée ici que jusqu'à la proportion de 1 pour cent d'acide nitrique, d'acide chlorhydrique et d'acide oxalique. Quant à l'acide sulfurique, il donne si promptement lieu à une opalescence persistante, qu'on n'a pas pu le comprendre dans la représentation graphique.

Fig. 3.



Avec la quantité d'acide indiquée, la solution d'albumine de l'œuf, de même que celle du sérum, ne reste pas seulement limpide, elle conserve aussi la forme non coagulée. Pour l'albumine de l'œuf, cette non-coagulation ne peut naturellement pas être mise en évidence par le mélange avec des solutions de Cl Na; mais, si l'on étudie l'action des acides et des alcalis, on trouve qu'il n'en faut que de très petites quantités pour déterminer la dissolution complète de l'albumine précipitée, et que par conséquent le troisième degré de solubilité est tout au plus atteint, lorsque la quantité d'acide n'a pas été trop grande.

La solubilité de l'albumine de l'œuf diminue donc aussi à mesure que la proportion d'acide s'élève. Seulement, elle ne peut pas être mesurée avec autant de précision qu'il est possible de

le faire, au moyen de la réaction avec des solutions de Cl Na à différents titres, pour l'albumine du sérum. Quant au fond du phénomène, il n'y a aucune différence.

La grande sensibilité que l'albumine de l'œuf, à proportion égale de sel, montre en présence des acides, prouve toutefois, à ce qu'il me semble, que l'albumine du sérum et celle de l'œuf ne sont pas une seule et même substance. [1])

Ce qui vient d'être communiqué conduit aux conclusions suivantes :

1°. Tant de l'albumine du sérum que de l'albumine du blanc d'œuf, on peut distinguer trois *combinaisons :*

a. avec les sels des terres alcalines. [2])

b. avec les alcalis : albuminates alcalins.

c. avec les acides : albumines acides.

2°. *La combinaison avec les sels des terres alcalines* est soluble dans l'eau. Quand la solution est chauffée lentement, une température peu élevée détermine déjà la séparation d'une partie de l'albumine à l'état non coagulé. A une température plus haute, l'albumine est précipitée sous la forme coagulée.

3°. Les sels neutres (Cl Na et autres) exercent sur cette précipitation et cette coagulation une influence retardatrice. A mesure que la proportion de ces sels est plus forte, il faut, au moins jusqu'à un certain maximum, une température plus élevée pour séparer l'albumine de sa solution.

4°. Les *albuminates alcalins* diffèrent suivant l'énergie et le degré de concentration de l'alcali, la durée de l'action et la température à laquelle la solution est soumise. En général, la

---

[1]) Cela résulte aussi de l'inégalité des pouvoirs rotatoires spécifiques des deux combinaisons albumineuses. Deux de mes élèves, MM. van Leeuwen et Kolf, ont déterminé autrefois, après dialyse avec de l'eau zincifère, le p. r. s. de l'albumine de l'œuf unie au phosphate de chaux, et l'ont trouvé égal à 32°,8. Pour l'albumine du sérum, la détermination n'a pu se faire avec exactitude de cette manière, parce que le liquide dialysé avec l'eau zincifère n'est pas entièrement limpide. On a pu constater, toutefois, que le p. r. s. de l'albumine du sérum, exempte d'alcali, est inférieur à 56°. (Voir *Onderzoekingen* etc., t. III, 1874).

[2]) Voir la note de la page 277.

solubilité de l'albumine de la combinaison diminue à mesure que l'action est plus énergique.

Les alcalis concentrés dissolvent l'albumine, mais en la faisant passer immédiatement, et à la température ordinaire, sous la forme coagulée.

Les solutions plus faibles la dissolvent également, mais ne déterminent sa transformation en albumine coagulée qu'après une action plus longue ou à l'aide de la chaleur.

De très petites quantités d'alcali n'opèrent pas, même à la température de l'ébullition, la transformation de l'albumine de la combinaison en albumine coagulée.

5°. Les *albumines acides* diffèrent suivant l'énergie et le degré de concentration de l'acide, la durée de l'action et la température à laquelle la solution est soumise. En général, la solubilité de l'albumine de la combinaison diminue à mesure que l'action est plus énergique.

Les acides forts et concentrés provoquent rapidement et à la température ordinaire le passage de l'albumine à sa forme coagulée.

Les degrés inférieurs de concentration des acides forts, ou les acides faibles organiques, n'accomplissent cette transformation qu'après une action prolongée ou à l'aide de la chaleur.

Les acides très faibles ne déterminent pas, même à la température de l'ébullition, la conversion de l'albumine de la combinaison en albumine coagulée.

6°. Cette action des alcalis et des acides est contrariée par les sels neutres (ClNa). En présence d'une plus forte proportion de sel, il faut une quantité plus grande d'alcali ou d'acide pour obtenir un même albuminate alcalin ou une même albumine acide.

D'après cela, les solutions albumineuses naturelles, contenant des sels, donnent par l'ébullition un albuminate alcalin dont l'albumine est précipitée par les acides sous la forme soluble, même quand elles renferment une proportion d'alcali beaucoup plus grande que celle qui est nécessaire pour faire passer à l'état insoluble l'albumine des solutions pauvres en sels, telles qu'on les obtient par la dialyse.

Pour la même raison, les solutions albumineuses naturelles demandent aussi une proportion d'acide relativement forte pour donner par l'ébullition une albumine acide d'où l'albumine se laisse séparer à l'état insoluble, tandis qu'avec les solutions dialysées, pauvres en sels, ce même effet est déjà produit par une très petite quantité d'acide.

7°. En elles-mêmes, à l'état libre, l'albumine du sérum et l'albumine de l'œuf, quoique non coagulées, sont insolubles dans l'eau.

A ce qui précède, j'ajouterai encore quelques observations.

1°. En traitant du sérum de vache étendu de 10 fois son volume d'eau par l'acide carbonique, on obtient environ 0,8 pour cent de paraglobuline. Par la dialyse, le sérum sanguin fournit beaucoup plus d'albumine unie à de l'alcali, le double et même — comme je l'ai observé dans un cas — jusqu'à 1,85 pour cent. Quelle est la cause de cette différence? Pourquoi, si la paraglobuline est tenue dissoute par la présence de l'alcali, ne se précipite-t-elle pas entièrement lorsque la liqueur, étendue au dixième, est neutralisée par un acide? L'explication de ce fait peut maintenant être donnée, je pense.

Ainsi que je l'ai déjà fait remarquer dans mon premier Mémoire sur les matières albuminoïdes [1]), la solubilité des albuminates alcalins (paraglobuline, myosine et fibrine) dans les solutions salines n'est pas aussi nettement limitée qu'on l'a généralement admis. Après que la fibrine — albuminate alcalin qui, n'importe son origine et n'importe pour quelle raison, est peu soluble — s'est séparée du plasma [2]), en entraînant dans sa contraction les corpuscules sanguins, le sérum abandonné contient encore une quantité considérable d'un albuminate alcalin plus soluble, la paraglobuline, qui après dilution au dixième est précipité en

[1]) Voir *Onderzoekingen* etc., tome I, et Pflüger's *Archiv*, t. II, p. 9, 1869.

[2]) Je parle, bien entendu, du plasma tel que nous le connaissons jusqu'ici, et non du plasma vivant, dans lequel, à ce que je suppose, la fibrine, de même que la paraglobuline, n'existe pas, ou du moins n'existe qu'en quantité beaucoup moindre.

partie par les acides, et mieux encore par ClNa ajouté jusqu'à saturation du liquide. De la première manière, par un acide, on retire du sérum de vache environ 0,8 pour cent de paraglobuline, de la seconde manière 1,8 pour cent, comme je l'ai déjà montré en 1868. Quand la paraglobuline a été précipitée par l'acide carbonique après dilution au dixième, on peut, en étendant de nouveau la liqueur et en la faisant traverser de nouveau par l'acide carbonique, ou bien en ajoutant un acide plus fort, tel que l'acide acétique, précipiter encore une partie d'albuminate alcalin, l'albuminate de Kühne; mais on ne parvient pas à séparer ainsi toute la matière albumineuse, car il reste un albuminate alcalin plus soluble que la paraglobuline, soluble encore dans des solutions salines renfermant moins de 0,1 pour cent de sel.

Pour cette raison, quand on opère sur des solutions albumineuses dialysées, entièrement exemptes de sels neutres solubles, les acides précipitent une beaucoup plus grande partie de l'albumine des albuminates alcalins qui existent dans la liqueur; on peut alors aussi se convaincre facilement que de l'alcali est combiné à l'albumine, car, malgré la réaction acide de la liqueur, celle-ci abandonne encore de l'albumine après une nouvelle addition d'acide [1]). Lorsqu'il ne reste plus que peu de cette albumine unie à de la soude, le précipité ne se forme pas dans les premiers instants, mais seulement après une action plus prolongée de l'acide. Toutefois, même dans ces liquides complétement dialysés, les acides ne précipitent pas toute l'albumine unie à la soude. Il en reste finalement encore une petite quantité, qui est tenue dissoute par des traces extrêmement faibles de soude, et qui ne peut être précipitée de cette solution par les acides. Cela ne paraît pas tenir à ce que la soude, qui est combinée avec

[1]). M. Schmidt prétend à tort que le sérum, débarrassé par le procédé ordinaire d'environ 0,8 pour cent de paraglobuline, ne donne plus d'albumine par la dialyse. Même après saturation par ClNa, une dialyse énergique détermine encore un précipité, parce que cette saturation elle-même n'a pas dépouillé le sérum de toute l'albumine qui s'y trouve unie à de l'alcali.

l'albumine agissant à la manière d'un acide, n'est pas enlevée à l'albumine par l'acide ajouté, mais à ce que cette albumine est soluble, non-seulement dans des traces très faibles de soude, mais aussi dans les minimes quantités de sel qui en proviennent par l'addition de l'acide. Lorsque, en effet, la liqueur traitée par l'acide est soumise à une nouvelle dialyse, il se forme de nouveau un dépôt d'albumine. En conséquence, les 1,85 pour cent trouvés par dialyse ne représentent probablement pas encore la *quantité totale* de l'albumine, unie à de la soude, qui existe dans le sérum de vache.

2°. Cette quantité totale est précipitée dans la dialyse faite avec de l'eau contenant du zinc, et telle est la raison de l'action spécifique que j'avais reconnue à l'eau zincifère. Lorsque du sérum sanguin, dialysé aussi énergiquement que possible avec de l'eau distillée, est traité ensuite par l'eau zincifère, le dépôt formé est, à la vérité, beaucoup plus faible que celui auquel donne lieu le sérum non dialysé, mais on obtient pourtant encore un précipité, parce que l'albumine unie à de l'alcali n'avait pas été éliminée en totalité.

3°. C'est à l'élimination plus ou moins complète de l'albumine combinée aux alcalis que doit être attribuée la différence que M. Schmidt a observée dans l'action des sels métalliques sur les solutions albumineuses dialysées et non dialysées. La combinaison avec les alcalis est décomposée beaucoup plus facilement que celle avec le phosphate de chaux. Dans le premier cas, on a en quelque sorte affaire à de l'albumine libre, et de là résulte la précipitation plus facile de cette albumine par les sels métalliques. Lorsque la combinaison de l'albumine avec le phosphate de chaux a été détruite au moyen d'un alcali, il n'y a plus aucune différence dans les phénomènes.

4°. Ce que nous savons maintenant de la manière dont les différents acides se comportent à l'égard de l'albumine explique pourquoi la réaction avec l'acide acétique et le Cl Na, que j'avais recommandée comme la meilleure pour déceler de petites quantités d'albumine, mérite la préférence. De tous les acides

étudiés, c'est l'acide acétique qui est le plus contrarié dans son action par ClNa, et qui, en conséquence, dénonce le plus sûrement la présence de l'albumine quand on chauffe la liqueur.

Par la neutralisation seule il est impossible de précipiter toute l'albumine. J'ai fait bouillir 2 c. c. de sérum sanguin, étendus de 10 fois leur volume d'eau, avec 1 c. c. de potasse à $\frac{1}{100}$ du titre normal; j'ai ensuite précipité par différentes quantités d'acide et filtré après le refroidissement. Voici les résultats:

	Quantité d'ac. chlorh. $\frac{1}{100}$ norm. empl. pour la précipitation.	Aspect du liquide après l'addition de l'acide.	Liquide filtré.
1.	7,5 c. c.	précipitation incomplète	trouble
2.	8 „	„ en apparence complète	limpide
3.	9,5 „	„ „ „ „	„
4.	9 „	„ „ „ „	„
5.	9,5 „	„ „ „ „	„
6.	10 „	„ „ „ „	trouble
7.	10,5 „	„ incomplète	„
8.	11 „	limpide.	—

Le liquide filtré des nos 2, 3, 4 et 5 a ensuite été chauffé. Dans les nos 4 et 5 il s'est formé un précipité floconneux; les nos 2 et 3 sont restés limpides, mais l'addition d'un acide y a fait apparaître un abondant précipité. Après tout ce qui a été communiqué, ce résultat ne peut plus nous surprendre.

La représentation graphique de l'influence des acides sur la solubilité de l'albumine, que j'ai donnée à la page 290, montre suffisamment pourquoi l'emploi de l'acide nitrique convient si peu pour la recherche de petites quantités d'albumine.

Conclusion.

S'il y a quelque résultat intéressant dans ce qui précède, il est dû à l'application rigoureuse de la méthode quantitative, à l'étude systématique de l'influence que le chlorure de sodium, les alcalis et les acides exercent sur l'albumine et sur ses combinaisons. J'ai commencé à travailler dans cette direction en 1868, et la suite de mes recherches n'a fait que confirmer et étendre les premiers résultats ainsi obtenus. L'action des alcalis sur l'albumine et la gêne que cette action éprouve de la part des sels neutres, phénomènes que j'ai maintenant appris à connaître, me paraissent surtout avoir quelque importance au point de vue physiologique.

La matière albumineuse que le sérum sanguin dilué laisse précipiter par l'action de l'acide carbonique avait montré d'abord quelques caractères — solubilité dans les solutions salines étendues et dans l'eau sous l'influence de l'oxygène — que ne possédait pas l'albumine précipitée, dans les mêmes conditions, de l'albuminate alcalin obtenu artificiellement par M. Lieberkühn. Pour cette raison, on avait distingué la matière appelée paraglobuline et l'albuminate alcalin. Cette manière de voir trouva un appui dans la découverte de M. Schmidt, qui montra que la paraglobuline détermine une coagulation dans les liquides fibrinogènes. Si l'hypothèse de M. Schmidt, que cette coagulation est due à *l'union* de la paraglobuline et de la matière fibrinogène, que la fibrine résulte par conséquent de la combinaison de ces deux substances, si cette hypothèse, dis-je, pouvait être regardée comme démontrée, la manière de voir en question serait, à mon avis, d'une incontestable justesse. Aussi M. Schmidt, qui d'après sa dernière communication [1]) persiste à défendre son hypothèse concernant l'origine de la fibrine, considère-t-il toujours la paraglobuline comme une matière albuminoïde qui, tout

[1]) Pflüger's *Archiv*, t. XI, 1875.

en offrant le caractère général d'un albuminate alcalin, est pourtant encore autre chose.

Pour moi, au contraire, la paraglobuline était simplement de l'albuminate alcalin, rien de plus et rien de moins. Je fis remarquer que les différences observées dans les propriétés chimiques pouvaient bien dépendre de circonstances accessoires, et je prouvai successivement qu'il en est réellement ainsi.

Je commençai par faire voir que la solubilité de la paraglobuline et d'autres corps albuminoïdes analogues, tels que la fibrine et la myosine, n'est pas aussi nettement limitée qu'on le croyait généralement [1]). Je montrai ensuite que la solubilité dans l'eau sous l'influence de l'oxygène n'appartient pas à la paraglobuline elle-même, mais dépend de son mélange avec du carbonate (et du phosphate) de soude, dont l'action dissolvante est renforcée par tous les gaz qui chassent l'acide carbonique, par l'hydrogène aussi bien que par l'oxygène. Aussi n'observe-t-on rien de cette solubilité dans l'oxygène quand on précipite la paraglobuline du sérum par un autre acide, ou quand on la débarrasse d'une autre manière de l'alcali qu'elle contient en mélange. Plus tard, je trouvai que les albuminates alcalins diffèrent suivant le degré de concentration de l'alcali qui sert à les obtenir, et finalement je préparai de l'albuminate alcalin artificiel dont l'albumine, après sa précipitation, était entièrement semblable à la paraglobuline. [2])

La seule différence qui subsistât encore, c'est que cet albuminate alcalin artificiel ne produisait pas, comme la paraglobuline du sérum sanguin, de coagulation dans les liquides fibrinogènes. Mais M. Schmidt lui-même a montré que cette action n'appartient pas non plus en propre à la paraglobuline. Pour que le

---

[1]) Il est facile de se convaincre que la matière appelée paraglobuline est un mélange de différentes „albumines" inégalement solubles. Lorsqu'on neutralise du sérum sanguin, et qu'ensuite on l'étend de un volume d'eau, une partie de cette albumine est déjà précipitée. En filtrant la liqueur, et y ajoutant encore un volume d'eau, on obtient un nouveau précipité, etc.

[2]) Voir *Onderzoekingen* etc., t. I—III, 1869—1874.

phénomène se manifeste, il faut, outre la paraglobuline et la matière fibrinogène, un troisième élément, — appelé ferment fibrinique, — et même un quatrième, Cl Na, d'après la dernière communication de M. Schmidt [3]). Comme aucun de ces constituants des liquides animaux, sauf Cl Na, ne peut être isolé à l'état de pureté, il y a lieu de se demander si le nombre des facteurs qui entrent en jeu dans la coagulation de la fibrine n'est pas encore beaucoup plus grand.

Je le répète, si la formation de la fibrine par la combinaison de la paraglobuline et de la matière fibrinogène — l'hypothèse primitive de M. Schmidt — pouvait être réputée une vérité acquise, je jugerais, comme lui, que la paraglobuline et l'albuminate alcalin ne peuvent être la même substance. Mais, bien loin d'être démontrée, cette hypothèse est devenue de plus en plus improbable. M. Schmidt cherche encore à la défendre en montrant que, lorsqu'on mêle les liquides fibrinogènes avec de très grandes quantités de paraglobuline, la proportion de fibrine obtenue croît notablement. Mais, en premier lieu, l'augmentation de la quantité de fibrine n'est pas en rapport avec celle de la paraglobuline employée, et, en second lieu, elle peut être expliquée tout aussi bien d'une autre manière. Depuis que nous savons que l'influence des alcalis sur la solubilité de l'albumine est contrariée par les sels, il n'est plus possible, ce me semble, d'attacher beaucoup de valeur à l'argument invoqué par M. Schmidt. En mélangeant les liquides fibrinogènes avec des solutions de Cl Ca, M. Hammarsten a réalisé une augmentation tout aussi notable de la proportion de fibrine.

D'après tout ce qui précède, je regarde la paraglobuline, non comme une matière albuminoïde de nature spécifique, mais simplement comme un albuminate alcalin d'une solubilité relative-

---

[1]) L'influence favorable que Cl Na exerce, d'après les observations de M. Schmidt, sur la coagulation de la matière fibrinogène, trouve son explication dans les faits exposés ci-dessus. Cette influence ne dépendrait-elle pas, en effet, de ce que l'action dissolvante de l'alcali est entravée par la présence du sel?

ment grande, — tel qu'on l'obtient par l'action des alcalis étendus. Pour les mêmes raisons, je ne regarde pas non plus la fibrine comme une matière albuminoïde de nature spécifique, provenant de la combinaison de la paraglobuline et de la matière fibrinogène, mais simplement comme une modification de l'albumine, analogue à la paraglobuline mais d'une solubilité moindre, — telle que la donne l'action des alcalis plus concentrés.

J'ai, en outre, tâché de fournir la preuve que la fibrine tire son origine des corpuscules sanguins. Dans mes premières recherches à ce sujet, faites en collaboration avec M. van der Horst, le sang sortant de la carotide était reçu directement dans des solutions salines. En saturant ces solutions, nous vîmes, de même que l'avait vu M. Denis, des fibres s'élever dans le liquide et venir former à la surface une couche spumeuse et visqueuse; mais nous remarquâmes de plus que, si nette qu'eût été la séparation, il y avait encore beaucoup d'éléments celluleux en suspension dans la solution saline. Ces éléments ne pouvaient consister que pour une faible proportion en corpuscules sanguins rouges, attendu que le liquide était incolore; toutefois, la plupart d'entre eux ne ressemblaient pas non plus à des corpuscules sanguins blancs. *En majeure partie c'étaient des corpuscules ratatinés, dans lesquels on ne distinguait pas de noyau.*

En général, la déposition du sang dans les solutions salines permet de discerner très bien les *éléments, autres que les corpuscules sanguins rouges et blancs, qui existent dans le sang.*

Ce sont ces éléments celluleux qui constituent la couche surnageante [1]).

Cette observation nous conduisit à penser que la fibrine pourrait bien être fournie par les éléments celluleux contenus dans le sang, et que la coagulation de ce liquide se rattachait peut-être à celle du protoplasme en général. En admettant la justesse de cette hypothèse, on devait pouvoir obtenir avec les corpuscules sanguins isolés une matière semblable à la fibrine. Il s'agissait

---

[1]) Voir *Onderzoekingen* etc., t. I, 1869.

seulement de les séparer du plasma à l'état non coagulé. Je l'essayai de différentes manières, mais longtemps sans succès. Enfin j'y réussis en mêlant, dans des conditions très favorables, du sang de cheval avec 10 fois son volume d'une solution de ClNa à 1 pour cent. Les corpuscules sanguins ainsi isolés me fournirent *dix fois* plus de fibrine que la solution saline dans laquelle ils s'étaient déposés. J'ai fait connaître cette expérience en 1870 (voir *Onderzoekingen* etc., t. II), avec tous ses détails, qui ne sont pas sans importance pour l'appréciation du résultat. Naturellement, je n'ai pu séparer les corpuscules sanguins colorés des corpuscules incolores, ni des autres formes cellulaires existant dans le sang. Rien ne m'autorisait donc à soutenir ou à contester la possibilité de la formation de la fibrine aux dépens d'une des espèces de corpuscules sanguins à l'exclusion des autres, et je me bornai à conclure (*l. c.* p. 130): *que les corpuscules sanguins sont la source principale de la fibrine du sang.*

Cinq ans plus tard, M. Schmidt a fait des expériences analogues. Outre les corpuscules sanguins colorés et incolores, il a trouvé d'autres éléments celluleux, ses *Körnerkugeln*, et il a observé, comme M. van der Horst, que la solution saline, dans laquelle les corpuscules sanguins se sont déposés, éprouve une coagulation beaucoup moindre lorsqu'elle est filtrée. Il croit aussi avoir constaté que la quantité des corpuscules sanguins incolores décroît notablement après que le sang a été extrait des vaisseaux.

Enfin, ayant laissé déposer dans ClNa à 1 pour cent, non le sang lui-même, comme dans mes expériences, mais le plasma séparé aussi rapidement que possible des corpuscules, il a retiré des couches inférieures de la solution saline beaucoup plus de fibrine que des couches supérieures. Il en conclut que mon expérience n'est pas probante. Les corpuscules sanguins blancs et les *Körnerkugeln*, qui se déposent plus lentement que les corpuscules rouges, sont, d'après lui, la cause du phénomène observé. Ils fournissent la paraglobuline et le ferment fibrinique,

et c'est pour cela que la matière fibrinogène du plasma donne plus de fibrine dans les couches inférieures.

Cette explication, toutefois, est défectueuse. Le fait, qu'on obtient plus de fibrine des couches inférieures de la solution saline que des couches supérieures, ne m'avait pas échappé. Souvent même on constate une coagulation dans les couches du fond. Mais ce phénomène est tout aussi bien d'accord avec ma manière de voir qu'avec celle de M. Schmidt. Jamais, en effet, je n'ai dit ni voulu dire que les corpuscules sanguins blancs ne prennent aucune part à la formation de la fibrine.

Mon expérience prouve beaucoup plus que celle de M. Schmidt. Ayant reconnu l'impossibilité, en opérant sur le sang du cheval, de séparer assez vite les corpuscules du plasma, j'ai laissé le sang lui-même se déposer dans des solutions salines étendues. Une fois, j'ai parfaitement réussi de cette manière à obtenir les corpuscules à l'état non coagulé. Par un froid rigoureux d'hiver, j'avais laissé déposer, dans 1 litre d'une solution à 1 pour cent de ClNa, 112 grammes d'un sang qui se coagulait avec une extrême lenteur. La solution claire fut ensuite décantée, de sorte qu'il ne restait plus au fond du vase que 61 grammes de matière. Les corpuscules sanguins (rouges, blancs et autres), qui étaient contenus dans ces 61 grammes, ayant été traités par du sérum, le mélange se coagula tout comme le sang lui-même, et me fournit *dix fois* plus de fibrine que les 1064 gr. du liquide dans lequel les corpuscules s'étaient déposés.

Supposons maintenant que les corpuscules rouges du sang n'entrent pour rien dans la cause du phénomène, et que celui-ci soit dû uniquement aux corpuscules blancs et aux autres cellules; il n'en résulte pas moins de mon expérience, avec une entière certitude, que *les éléments celluleux du sang sont la source principale de la fibrine*, et que l'explication de M. Schmidt ne peut être admise. M. Schmidt croit en effet que, pour former de la fibrine, il faut non-seulement de la paraglobuline et du ferment, mais aussi de la matière fibrinogène. Selon lui, chez les mam-

mifères, cette matière fibrinogène se trouve dans le plasma. Mais d'où est alors venue, dans mon expérience, la matière fibrinogène nécessaire? Dans les 61 grammes qui m'ont fourni la fibrine, le plasma était dilué de 10 fois son volume d'eau. Il y avait donc tout au plus 6,1 grammes de plasma. Evidemment, ces 6,1 grammes ne pouvaient contenir la quantité requise de matière fibrinogène.

Mon expérience prouve donc bien, ce me semble, le point essentiel de la question, à savoir, que la fibrine provient des éléments celluleux du sang et que la coagulation du sang doit être assimilée à celle du protoplasme en général.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

RADCLIFFE LIBRARY
2 DEC 78

ÉTUDES COMPARÉES SUR L'ACTION ÉLECTRIQUE DES MUSCLES ET DES NERFS,

PAR

Th. W. ENGELMANN.

Comme suite à un travail antérieur [1]), je m'étais proposé d'abord d'étudier les phénomènes électriques qui accompagnent la contraction du cœur. Mais, en m'occupant de ces recherches, je rencontrai des faits d'un intérêt plus général, qui détournèrent mon attention dans une autre direction et qui demandaient d'être élucidés avant tout. Ce sont ces faits que j'exposerai dans les pages suivantes.

Expériences sur le cœur de la grenouille.

Des phénomènes divers par lesquels le muscle cardiaque se distingue, sous le rapport électromoteur, des muscles striés ordinaires, il n'y en a aucun qui se fasse autant remarquer que la chute rapide de la force existant entre une section artificielle et

[1]) *De electromotorische verschijnselen der spierzelfstandigheid van het hart*, première partie (*Onderz. physiol. labor.* Utrecht, 3e Série, III, 1875, p. 101).

une surface naturelle non lésée. Dès la première minute après que la section a été faite, on constate ordinairement un affaiblissement de la force; au bout de cinq minutes elle conserve à peine, en moyenne, les deux tiers de la valeur très notable mesurée au début, et au bout d'une heure, ou même plus tôt, elle est souvent déjà tombée à zéro. Ce phénomène, qui s'est retrouvé sans exception chez toutes les espèces animales dont le cœur a été étudié, devait nécessairement surprendre, et cela pour deux raisons principales. D'abord, parce que la force électromotrice des muscles striés ordinaires, chez qui le contenu contractile des fibres a pourtant presque exactement la même structure que celui des cellules du muscle cardiaque, ne s'affaiblit dans les mêmes conditions qu'avec une extrême lenteur; et, en second lieu, parce que l'excitabilité et la contractilité, qu'on voit d'ordinaire correspondre assez bien à la grandeur de la force électromotrice, diminuent évidemment — au moins dans le cœur des animaux à sang froid — avec une vitesse incomparablement plus petite que l'activité électromotrice.

Cette dernière contradiction disparut, à la vérité, lorsque j'eus trouvé que, tant que le cœur reste excitable, il suffit d'enlever l'ancienne surface de section, et en général de faire une section nouvelle, pour voir aussitôt reparaître la force avec une intensité qui parfois atteint le degré primitif. En ce qui concerne le premier point, toutefois, cette nouvelle circonstance ne pouvait que rendre le phénomène encore plus insolite, attendu que, d'après les expériences de M. du Bois-Reymond [1]), la force électromotrice des muscles ordinaires, une fois affaiblie, ne peut être relevée par le rafraîchissement de la section transversale. Spécialement au point de vue de l'hypothèse moléculaire, l'anomalie offerte par le cœur devait intéresser et surprendre. Intéresser, car il semblait qu'on eût pris ici sur le fait le développement de la couche parélectronomique; surprendre, puisqu'il paraissait au premier abord inexplicable pourquoi cette couche parélec-

[1]) E. du Bois-Reymond, *Ueber die Erscheinungsweise des Muskel- und Nervenstromes u. s. w.* (*Archiv für Anatomie, Physiologie, u. s. w.* 1867, p. 306 et suiv.)

tronomique ne se développerait pas tout aussi bien, dans les mêmes conditions, chez les muscles ordinaires à stries transversales. Ce sont ces considérations qui ont été le point de départ des recherches suivantes.

J'exposerai d'abord les faits fondamentaux. Pour les établir, je me suis servi, en général, des méthodes ordinaires: dérivation du courant dans la chambre humide, au moyen d'électrodes non polarisables, vers le galvanomètre à miroir, et mesure de la force par le procédé de compensation de du Bois-Reymond. Quelques précautions spéciales sont rendues nécessaires par l'extrême sensibilité de la surface du cœur aux influences extérieures, surtout aux actions mécaniques. Ainsi que je l'ai montré ailleurs [1]), chaque point de la surface cardiaque acquiert déjà une tension négative appréciable à la suite d'une action mécanique en apparence tout à fait insignifiante, telle, par exemple, qu'un léger choc ou une légère pression avec la pointe de l'électrode d'argile molle. Des lésions, trop faibles pour déterminer une contraction ou un changement persistant visible à la surface du cœur, peuvent provoquer des différences de tension de 0,01 D [2]). Plus le cœur est frais et excitable, plus l'action est vive. Il faut donc éviter avec soin les attouchements un peu rudes et, en général, tous ceux qui ne sont pas strictement nécessaires; l'application des électrodes, notamment, doit se faire aussi doucement que possible. On y parvient le mieux en ajoutant aux électrodes d'argile, comme pointe conductrice, un petit lambeau mou; j'emploie ordinairement, pour cet usage, un lambeau de mésentère de grenouille.

[1]) *De electromotorische verschijnselen der spierzelfstandigheid van het hart*, première partie. (*Onderzoek. gedaan in het physiolog. labor. der Utrechtsche Hoogeschool*, 3e série, III, 1875, p. 107 et suiv.)

[2]) Cette sensibilité du cœur, sous le rapport électromoteur, est incontestablement beaucoup plus grande que celle des muscles ordinaires, ce qui dépend sans doute en grande partie de la nature spécifique de la substance irritable et non de l'absence d'un sarcolemme protecteur. Elle est, selon toute apparence, en relation de cause avec cet autre fait, que le muscle cardiaque se contracte déjà sous l'influence d'excitations mécaniques beaucoup trop faibles pour déterminer le même effet dans les muscles ordinaires.

Il faut de plus avoir égard à la nature du liquide qui sert à humecter la pointe conductrice, car la surface du cœur est très sensible aussi aux influences chimiques. De même que dans les cas analogues, le sang, le sérum du sang et, au moins approximativement, les solutions de sel marin à 0,6—1 pCt. se sont montrés indifférents. Plus étendues, les solutions de sel rendent le point touché négatif, d'autant plus que la dilution est plus grande; les solutions plus concentrées agissent en sens inverse, mais la tension positive ne croît que lentement à mesure que la concentration augmente, ce qui est conforme à l'observation faite par M. du Bois-Reymond [1]) sur les muscles ordinaires.

Si l'on procède maintenant, en ayant constamment égard aux observations qui précèdent, à l'étude de l'action des sections artificielles du cœur, on vérifie d'abord le fait, depuis longtemps connu, que chacune de ces sections est négative par rapport à la surface naturelle de l'organe. Mais on reconnaît en même temps que la grandeur de la force dépend de circonstances très nombreuses, parmi lesquelles se présente tout d'abord, comme de beaucoup la plus influente, le temps écoulé depuis que la section a été pratiquée. L'influence de ce seul facteur est si prépondérante, qu'elle peut surpasser et masquer toutes les autres. On conçoit que la constatation et surtout la détermination quantitative des autres dépendances sont ainsi rendues extrêmement difficiles.

Coupons le ventricule en travers près de sa base, de sorte qu'il cesse définitivement de battre, enlevons rapidement avec des ciseaux les bords ordinairement un peu rentrants de la plaie, afin d'y être autant que possible à l'abri de l'immixtion de la surface longitudinale naturelle, enfin dérivons le courant

---

[1]) E. du Bois-Reymond, *Ueber die electromotorische Kraft der Nerven und Muskeln.* (*Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w.*, 1867. p. 483). Pour la force électromotrice entre la section transversale et la section longitudinale M. du B.-R. a trouvé, en dérivant avec une solution concentrée de sel marin. 0,060 D (moyenne de 14 expériences); avec l'argile salée ordinaire (environ 0,75 pCt.), 0,056 D; avec l'eau distillée, 0,039 D (moyenne de 16 expériences).

sur une étendue moyenne de la plaie et à la pointe cardiaque non lésée ou en son voisinage immédiat: on obtient alors, dans la première minute qui suit la section, lorsqu'on a opéré sur des grenouilles adultes et bien portantes, des forces électromotrices dont la valeur est ordinairement comprise entre 0,025 D. et 0,04 D. Les valeurs au-dessous de 0,02 D. et au-dessus de 0,05 D. sont rares. Comme moyenne de 47 expériences, faites autant que possible dans les mêmes conditions, j'ai trouvé 0,0311 D. — On obtient des valeurs analogues quand la section est pratiquée autrement, par exemple à la pointe du cœur, ou parallèlement à l'axe longitudinal du ventricule, ou obliquement, — la seconde dérivation étant alors toujours effectuée en un point de la surface naturelle aussi éloigné que possible de la surface coupée.

Les divers points d'une section artificielle quelconque se comportent, il n'y a pas lieu de s'en étonner, d'une manière assez différente, et la distribution des tensions ne suit pas une loi simple, comme on l'observe pour les sections artificielles des muscles volontaires à structure régulière. D'une façon tout à fait générale, seulement, on peut dire que la négativité augmente du côté de la surface naturelle. Mais le lieu de négativité maximum ne se laisse nullement préjuger avec certitude. Cela s'explique facilement quand on songe à la disposition extrêmement compliquée des fibres du cœur. En outre, la surface de la section est rarement tout à fait lisse, mais d'ordinaire inégale, parce que, en devenant rigides, les faisceaux musculaires plus ou moins parallèles à cette surface se renflent et font saillie, tandis que les faisceaux perpendiculaires se rétractent. Aussi, lorsque la dérivation sur la surface coupée se fait par un conducteur très délié, on rencontre assez souvent des points très voisins l'un de l'autre qui offrent des différences de tension fort notables (0,01 D. et plus). Des forces de 0,08 D. peuvent être mesurées dans de pareilles conditions. Il est possible que des courants d'inclinaison entrent alors aussi en jeu. Ces courants se manifestent avec beaucoup de netteté lorsque la dérivation, sur la section transversale, s'opère directement au moyen de

pointes déliées d'argile (sans lambeau de tissu connectif), et que, par suite du resserrement progressif du cœur, la masse musculaire adhérente à la pointe d'argile est étirée en forme de cône [1]).

La surface naturelle du ventricule est en général, lorsqu'il n'y a eu nulle part de lésion, parfaitement isoélectrique. Mais, en cas de section artificielle, la positivité diminue, ainsi qu'il était à prévoir, à mesure qu'on se rapproche de la section. Comme cette immixtion de la coupe transversale se fait déjà sentir à une distance de 1—2 mm. du bord de la plaie, et que la préparation elle-même n'a que quelques millimètres de longueur et de largeur, on comprend que la région du maximum de tension positive n'ait souvent qu'une étendue extrêmement petite.

De tout ce qui précède, découle pour le but que nous nous proposons, à savoir la détermination de l'influence du temps sur la force, la nécessité de dériver le courant de la surface naturelle à une distance aussi grande que possible des bords de la plaie. Dans mes expériences, la surface touchée par le conducteur mesurait, en moyenne, 2—3 millim. carrés sur la section transversale et 1 mm. c. sur la section longitudinale.

Dans ces conditions les phénomènes présentent, à partir du moment où la section est pratiquée, un tableau très uniforme: la force décroît progressivement jusqu'à zéro ou jusqu'à près de zéro. Parfois on observe, durant les premières minutes, un léger accroissement (de quelques centièmes tout au plus). La règle, toutefois, c'est la chute immédiate. Celle-ci a lieu avec une vitesse qui augmente rapidement dans les premières minutes, qui reste ensuite longtemps constante et qui enfin diminue de nouveau. Le tableau suivant donne à cet égard des indications plus précises. Dans les expériences qui lui servent de base, la force, durant les 10—15 premières minutes, était ordinairement mesurée de minute en minute, ensuite à des intervalles plus éloignés. Entre les mesures, le circuit restait ouvert.

La force électromotrice du cœur de la grenouille s'abaissa:

[1]) Voir E. du Bois-Reymond, *Zusatz zur Lehre von den Neigungsströmen des Muskels.* (*Berliner Monatsberichte*, 1866, juin, p. 387).

en 5	min.,	moy.	de	40	exp.,	à	64,1 %	(max.	86,7,	min.	45,9)
„ 10	„	„	„	27	„	„	43,3 „	(„	69,1	„	5,0)
„ 15	„	„	„	17	„	„	32,9 „	(„	47,1	„	0,0)
„ 1 heure		„	„	22	„	„	4,7 „	(„	20,0	„	—2,2)
„ 24 heures		„	„	21	„	„	1,1 „	(„	4,0	„	—2,0)

Dans des conditions entièrement semblables, la force électromotrice du muscle couturier de la grenouille s'abaissa: [1])

en 1	heure,	moy.	de	45	exp.,	à	86,1 %	(max.	113,9	min.	51,1)
„ 24	heures	„	„	47	„	„	43,6 „	(„	62,4	„	8,3)
„ 48	„	„	„	15	„	„	30,8 „	(„	55,8	„	5,5)

La persistance du courant musculaire est, d'après cela, encore plus grande que ne l'avait trouvé M. du Bois-Reymond [2]). Dans les expériences de celui-ci, qui eurent lieu en décembre dans une chambre chauffée, — ce qui explique peut-être la différence, — la force d'un des muscles de la cuisse (couturier ou grêle), coupé en travers, tomba, comme moyenne de 6 observations, en 30 minutes à environ 0,75 et en 60 minutes à 0,59 de sa valeur primitive. Néanmoins, l'abaissement se fit encore avec beaucoup plus de

---

[1]) La force fut toujours mesurée entre une section transversale nette, pratiquée à 2 mm. de l'extrémité pelvienne du muscle, et la section longitudinale naturelle, prise au tiers moyen de la longueur du muscle, sur sa face large antérieure. Ici encore, la dérivation était toujours opérée par l'intermédiaire de deux lambeaux de mésentère. Les expériences eurent lieu en août, septembre et octobre, sur des individus grands et moyens de *R. esculenta*, à une température de chambre variant entre 12° et 25° C. Pour faire la préparation, on détruisait, à l'aide d'une aiguille introduite par la voûte du crâne, le cerveau et la moelle épinière des grenouilles, puis on enlevait avec des ciseaux la peau de la face interne de la cuisse, sans toucher aux muscles sous-jacents. Le couturier était alors détaché, en partant de l'extrémité tibienne. Les muscles qui, coupés, tombaient dans un état tétanique persistant, n'étaient pas utilisés. Ce cas, du reste, ne se présenta que 2 fois sur 50. Dans l'intervalle des mesures successives de la force électromotrice, les muscles restaient couchés, sans contact avec les électrodes, sur une plaque de verre dans la chambre humide.

[2]) E. du Bois-Reymond, *Ueber die Erscheinungsweise* etc. *l. c*, p. 308 et suiv.

lenteur que chez le muscle ventriculaire sectionné dans mes expériences.

On comprend immédiatement que cette différence dans la rapidité du décroissement de la force électromotrice des deux muscles doit avoir une cause tout à fait spécifique. Evidemment, on ne peut songer à l'expliquer en disant que le muscle cardiaque, dans les conditions données, perd beaucoup plus vite que les muscles ordinaires son irritabilité et sa contractilité. S'il existe une différence sous ce rapport, ce qu'il faudrait commencer par établir, elle est en tout cas beaucoup trop faible. D'ailleurs, il est très facile de se convaincre que des préparations cardiaques, dont la force électromotrice est tombée en $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{2}$ heure à zéro, peuvent encore répondre par des contractions très grandes et très énergiques à des excitations très légères. Un muscle strié ordinaire ne présente plus trace d'irritabilité lorsque la force de sa section transversale artificielle est descendue à zéro. L'irritabilité peut même y être devenue déjà entièrement insensible alors que la force électromotrice mesure encore plus de 30 pour cent de la valeur primitive.

L'intervention d'une cause toute spéciale chez le cœur ressort directement du fait, déjà mentionné au début de ce Mémoire, qu'il suffit de rafraîchir la section transversale du cœur pour qu'aussitôt sa force électromotrice se relève très notablement, ou pour qu'elle reparaisse si elle s'était déjà effacée; de même, toute nouvelle section transversale, n'importe où et comment elle ait été pratiquée, se montre fortement négative par rapport à une section faite antérieurement. Non-seulement ce résultat est assuré tant que le cœur reste irritable, mais, après ce terme, le rafraîchissement de la section continue encore longtemps à produire le même effet. Dans des conditions toutes semblables, le renouvellement de la section d'un muscle ordinaire n'est pas capable de relever, au moins d'une manière tant soit peu notable, la force électromotrice déjà affaiblie.

La force du ventricule cardiaque de la grenouille est remontée, à la suite du rafraîchissement de la section,

en 6 exp.,	après	5—15	min.,	de 27 %	à 100,1 %	Accroiss.	+ 73,8 %
„ 8	„	„	30	„	„ 5,8 „	„ 64,8 „	„	+ 59,0 „
„22	„	„	1	h.	„ 4,7 „	„ 70,7 „	„	+ 66,0 „
„ 5	„	„	4	„	„ 3,8 „	„ 45,3 „	„	+ 42,5 „
„13	„	„	24	„	„ 2,9 „	„ 47,2 „	„	+ 44,3 „

Comme on le voit, l'accroissement de force déterminé par le rafraîchissement de la surface coupée est à chaque moment positif et, en outre, très considérable, bien que la force obtenue à la suite de cette opération, — et que nous nommerons force *latente*, en opposition avec la force *manifeste* de la section précédente, — diminue dans la suite du temps. Ce n'est pas seulement en moyenne que l'accroissement était toujours positif aux instants indiqués, il l'était aussi dans chaque cas particulier. Les maxima et minima d'accroissement observés s'élevaient, quand le rafraîchissement était opéré au bout de 5—15 min., respectivement à 122,4 et 42,0, au bout de 30 min. à 101,7 et 41,6, au bout de 1 heure à 141,0 et 40,0, au bout de 4 heures à 55,2 et 34,3, au bout de 24 heures à 73,6 et 22,1 pCt. de la valeur mesurée au début, immédiatement après que le cœur avait été préparé et la première section pratiquée [1].

Il n'est pas douteux que l'accroissement moyen eût été encore plus considérable si la soustraction de substance musculaire, lors du rafraîchissement, n'avait raccourci la préparation déjà assez petite, et si, par là, la surface de dérivation sur la section longitudinale n'avait été exposée, dans une mesure plus forte, à l'immixtion de la section transversale. En ayant égard à cette circonstance, on doit regarder comme particulièrement digne d'attention le fait que jamais on n'a observé, après le rafraîchissement, une force moindre qu'avant.

Au sujet de l'influence que le rafraîchissement de la section transversale exerce sur la force électromotrice abaissée des *muscles ordinaires*, nous possédons des données anciennes et

[1]) La première section était dirigée, dans tous les cas, parallèlement à la base du ventricule. Le rafraîchissement se faisait en enlevant avec des ciseaux une couche aussi mince que possible.

nouvelles dues à M. du Bois-Reymond. Les expériences anciennes semblaient indiquer un relèvement de la force à la suite du rafraîchissement. Plus tard, M. du Bois-Reymond s'est convaincu qu'il y avait là une illusion, produite par la polarisation des électrodes. „Je trouve maintenant" dit-il [1]), „qu'après le rafraîchissement de la section transversale le courant montre parfois exactement la même intensité qu'auparavant; d'autres fois on observe un léger accroissement. Mais ces fluctuations ne sont pas plus fortes que celles qui se manifestent quand on se borne à enlever et replacer les électrodes, sans renouveler la section transversale."

Mes propres expériences m'ont appris qu'il faut tenir ici grandement compte des conditions dans lesquelles se trouvent les muscles après que la première section a été pratiquée. En choisissant des conditions identiques à celles dont il vient d'être question à propos des expériences sur le cœur, c'est-à-dire, en tuant l'animal par la destruction des grands centres nerveux, enlevant aussitôt les muscles et les conservant sur une plaque de verre dans un espace saturé d'humidité, à la température ordinaire, j'ai trouvé, comme moyenne d'un grand nombre d'observations, que le rafraîchissement de la section est réellement inefficace, sinon d'une manière absolue, au moins en comparaison avec ce qui a lieu pour le cœur. Cela ressort du tableau suivant, qui contient les résultats de différentes séries d'expériences faites, en mai et en octobre, sur le muscle couturier d'individus bien portants et de taille moyenne de *Rana esculenta.* La section transversale artificielle était pratiquée à la distance de 2—4 mm. de l'extrémité supérieure, plus rarement de l'extrémité inférieure du muscle; le point de la section longitudinale, d'où était dérivé le courant, se trouvait à 12—15 mm. de la section transversale, de sorte que celle-ci, même après avoir été rafraîchie par l'enlèvement d'une tranche musculaire épaisse de 1—2 mm., ne pouvait guère exercer par son immixtion un effet perturbateur. Sur la section transversale la dérivation se faisait, bien entendu,

[1]) *Ueber die Erscheinungsweise* etc., *l. c.* p. 307.

dans une étendue aussi large que possible, sur la section longitudinale, dans une étendue d'environ 3 mm. carrés.

La force électromotrice du muscle couturier s'éleva ou s'abaissa, par suite du rafraîchissement de la section,

dans 27 exp.,	au bout	de	1 h.,	de	82,9	à	80,1%	Accroissement	— 2,8
33	„	„	„	„ 24 „	„ 38,7	„	42,6 „	„	+ 3,9
15	„	„	„	„ 48 „	„ 30,8	„	31,3 „	„	+ 0,5

Dans les 27 expériences faites au bout de 1 heure, l'accroissement fut 19 fois négatif, 3 fois positif, 5 fois imperceptible; au bout de 24 heures, sur 33 cas, il ne se montra que 3 fois négatif, mais 29 fois positif, 1 fois insensible. Des 15 expériences faites après 48 heures, 5 donnèrent un accroissement négatif, 6 un accroissement positif, 4 un accroissement insensible. — Les maxima et minima s'élevèrent approximativement au bout de 1 heure à + 6,2 et — 9,7, au bout de 24^h à + 9,4 et — 3,1, au bout de 48^h à + 6,1 et — 2,8 pCt. de la valeur primitive.

C'est donc seulement après un séjour de 24 heures dans la chambre humide que le muscle a présenté ici, d'une manière non équivoque, le phénomène du relèvement de la force par le rafraîchissement de la section. Comparée à celle qui a été observée chez le cœur, l'action est toutefois si insignifiante, qu'il est bien permis de la négliger provisoirement.

On peut maintenant affirmer sans crainte que l'abaissement de la force électromotrice des sections artificielles du cœur de la grenouille doit avoir une cause générale, agissant en chaque point de la substance musculaire, et une cause locale, ayant son siège à la section transverse. La première est attribuable sans doute à la décomposition spontanée de la substance musculaire, qui fait des progrès continus après que le cœur a été extrait du corps, et qui, de même qu'elle amène l'extinction de l'irritabilité et de la contractilité, doit finalement aboutir aussi à l'extinction de l'action électromotrice. Que la polarisation interne n'y joue pas un rôle marquant, cela était d'avance très probable. Toutefois, je n'ai pas laissé de m'en assurer par des expériences directes, dans lesquelles je n'avais qu'à suivre les

mêmes méthodes opératoires qui avaient été appliquées par M. du Bois-Reymond [1]) à la recherche d'une influence possible de la polarisation interne sur le décroissement de la force électromotrice des muscles ordinaires. J'ai en conséquence exécuté, sur des cœurs qui se trouvaient du reste dans des conditions aussi semblables que possible, des séries d'expériences comparatives sur le décroissement, pendant la première demi-heure, de la force manifestée entre la section transversale artificielle près de la base du cœur et la section longitudinale naturelle près de la pointe, expériences dans lesquelles, ou bien 1) le circuit restait constamment fermé, ou bien 2) il restait constamment ouvert (sauf aux instants des mesures d'intensité), ou bien 3) le circuit était constamment fermé, mais la force incessamment compensée, ou bien 4) l'électrode n'était mise que de temps en temps, et aussi également que possible, en contact avec le cœur, ou enfin 5) le circuit était tenu alternativement fermé pendant cinq minutes et ouvert pendant cinq minutes. Dans tous les cas, la force était mesurée de cinq en cinq minutes. Or, n'importe lequel des cinq modes opératoires on avait employé, la marche du décroissement, déduite chaque fois, en moyenne, de cinq expériences, fut toujours trouvée la même. Au bout d'une demi-heure, la force mesurait environ, d'après la moyenne de chaque série d'expériences, 10—15 pCt. de la valeur primitive.

Ces expériences nous apprennent, en même temps, que la cause locale du décroissement d'intensité, celle qui est attachée à la section transversale, ne doit pas être cherchée dans une polarisation *externe*. Mais quelle est donc cette cause, dont l'action se montre si extraordinairement plus rapide et plus forte que celle de l'altération spontanée et générale de la substance du cœur?

Il est *a priori* peu probable qu'elle dépende d'une particularité de la *substance* des éléments du muscle cardiaque. Au microscope cette substance se montre composée, comme celle des fibres musculaires ordinaires, de couches alternatives de particules

[1]) *Ueber die Erscheinungsweisse* etc., *l. c.*, p. 269.

monoréfringentes et biréfringentes, dans lesquelles on distingue pareillement des disques transversaux, disques médians et intermédiaires, avec leurs caractères spéciaux. Pas plus que les propriétés morphologiques de la substance musculaire cardiaque, sa structure chimique et ses phénomènes physiologiques ne permettent de prévoir, sous le rapport de l'action électromotrice, des différences aussi importantes et aussi caractéristiques que celles qu'on observe entre le cœur et les muscles ordinaires; on y est d'autant moins autorisé, qu'après la mort les variations de la force électromotrice latente sont, au fond, les mêmes pour les deux sortes d'éléments musculaires, ainsi qu'il ressort des tableaux communiqués ci-dessus. La force latente du cœur est tombée en 24 heures à 47,2 pCt., celle du couturier à 43 pCt. de la valeur primitive. Avant d'admettre, pour rendre compte de la diversité d'action électromotrice des deux espèces d'éléments musculaires striés, une différence fondamentale dans leur substance, nous sommes donc obligés de chercher si d'autres modes d'explication ne seraient pas possibles.

On ne saurait évidemment songer à la „*terminale Nachwirkung*" récemment décrite par M. du Bois-Reymond [1]), et cela à raison seule du fait que, pendant toute la durée de mes expériences, les préparations du cœur n'ont pas été incitées une seule fois à se contracter. En outre, la réaction terminale faisait défaut quand M. du Bois-Reymond opérait sur une section transversale artificielle.

Par contre, une explication naturelle et entièrement satisfaisante, à ce qu'il me semble, se déduit de la considération des faits suivants. A part la disposition extrêmement compliquée de ses fibres, qui ne peut avoir ici aucune influence décisive, le cœur se distingue très essentiellement des autres masses musculaires striées en travers par les dimensions incomparablement moindres de ses éléments morphologiques: il se compose de cellules *microscopiques*, tandis que les muscles ordinaires sont formés de fibres au moins cent fois plus longues en moyenne. Ainsi que

[1]) *Ueber die negative Schwankung des Muskelstromes bei der Zusammenziehung* (*Archiv für Anatomie, Physiologie u. s. w.*, 1876, p. 134 et suiv).

je l'ai montré précédemment [1]), les différentes cellules musculaires du ventricule, bien qu'unies pendant la vie en un conducteur physiologique, se comportent, lors de la mort, comme des individus absolument distincts. Une même loi [2]) s'applique au tissu musculaire du ventricule et à d'autres chaînes de cellules animales (muscles lisses, fibres nerveuses, épithéliums vibratiles): les cellules individuelles peuvent pendant la vie se transmettre par contact le phénomène de l'excitation, mais elles meurent chacune pour soi. La mort ne se propage pas de cellule en cellule. Dans le cœur, le processus de raidissement provoqué par la section s'arrêtera donc à très peu de distance de la plaie, et sera par conséquent, selon toute apparence, terminé beaucoup plus vite que dans les muscles ordinaires, où il a généralement à parcourir un espace infiniment plus long avant d'atteindre l'extrémité des fibres coupées. Cette supposition seule explique comment des fragments microscopiques du cœur de la grenouille, conservés isolément dans du sérum, peuvent rester excitables pendant beaucoup d'heures et même pendant plusieurs jours, et comment l'excitabilité peut persister des heures entières dans les petits ponts musculaires, de largeur microscopique, au moyen desquels j'ai prouvé antérieurement la transmission directe, de cellule en cellule, de l'excitation appliquée au muscle cardiaque. La conclusion, que c'est réellement à la surface naturelle des cellules que s'arrête le phénomène de raidissement, devait déjà être admise par cela seul qu'il n'y a aucune raison — au moins dans les préparations soustraites, comme les nôtres, à l'action nutritive du sang — pour que la rigidité trouve sa limite *à l'intérieur* des cellules partiellement tuées par la blessure. Cela n'a pas lieu dans les fibres musculaires ordinaires qui sont soustraites à l'influence de la circulation, et de même on peut prouver, de la manière la plus palpable, que dans les fibres nerveuses ce sont

[1]) *Sur la manière dont l'excitation se propage dans le muscle cardiaque* (*Arch. néerl.*, t. XI.)

[2]) *Ibid.* Voir aussi: *Ueber Degeneration von Nervenfasern* (*Onderzoek. physiol. laborat.*, 3e série, IV, 1876, p. 181).

seulement les limites des cellules (les étranglements de Ranvier) qui arrêtent la mort dans sa marche progressive à partir du point lésé. Du reste, pour le cœur aussi, le fait peut être reconnu au microscope, bien que l'observation soit ici plus délicate et ne puisse, pour des raisons faciles à saisir, conduire à des résultats aussi nets que lorsqu'il s'agit des fibres nerveuses à gaîne médullaire. Si, une demi heure ou plus après qu'une section a été pratiquée, les parties raidies de la chair du cœur, situées immédiatement sous la section, sont examinées dans des liquides indifférents ou dans l'acide osmique à 1 pCt., on trouve à toutes ces cellules, ou du moins à la plupart d'entre elles, l'aspect très net de fuseaux assez fortement réfringents, ou quelquefois troubles, séparés l'un de l'autre par des lignes claires d'une largeur parfois mesurable (expression optique de fentes). Evidemment, les cellules devenues rigides se sont crispées, rapetissées, chacune pour soi et comme un tout, et en même temps une partie du liquide interposé (sérum musculaire) a été exprimé. Mais déjà à une faible distance, souvent à $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ mm. de la surface de section, les fibres musculaires se montrent encore pendant des heures, et même plus d'un jour après que la section a été faite, homogènes, sans aucune indication des limites cellulaires, tout comme dans l'état normal et excitable. La partie devenue rigide et la partie normale se distinguent nettement l'une de l'autre par les contours cellulaires. Il n'est donc pas douteux que la surface de démarcation entre la substance musculaire vivante et la substance morte ne soit formée, en fin de compte, par les surfaces naturelles des cellules qui n'ont pas été directement lésées.

Ces faits nous fournissent maintenant la clé pour expliquer l'abaissement rapide de la tension négative et l'influence favorable du rafraîchissement des sections artificielles du cœur de grenouille. D'abord il semble assez indifférent, quoique non absolument, qu'on se place pour cette explication au point de vue de l'hypothèse moléculaire ou qu'on cherche, avec M. Hermann, la source de l'électricité dans le contact des substances musculaires mourante et vivante. L'hypothèse de

M. Hermann a un avantage réel en ceci, qu'elle explique les phénomènes sans avoir besoin d'aucune autre supposition. Avec elle, en effet, on comprend immédiatement que l'extinction progressive du processus léthal doit s'accompagner de l'extinction progressive du développement de l'électricité, de même qu'il est naturel, avec elle, que le rafraîchissement de la section, s'il atteint les parties encore vivantes, réveille ou augmente la force électromotrice.

Au point de vue de l'hypothèse moléculaire, l'explication prend une forme moins simple. Après que les cellules lésées sont mortes et ont par suite perdu leur activité électromotrice, les cellules immédiatement sous-jacentes entrent en jeu par celles de leurs surfaces naturelles qui sont tournées du côté de la blessure. Ces surfaces sont en partie des sections naturelles longitudinales [1]) (au plus haut degré dans les fibres parallèles à la plaie), en partie des sections naturelles transversales (au plus haut degré dans les cellules normales à la face de démarcation). Prenons le cas le plus défavorable qui se laisse concevoir pour l'hypothèse moléculaire, celui où toutes les cellules seraient dirigées normalement à la surface coupée. On aurait alors à considérer, à la section transversale, l'action de toutes les moitiés de cellules qui pénètrent dans la substance morte. Pour plus de simplicité, on peut se représenter chaque cellule musculaire comme un double cône très allongé, dont les deux sommets sont tronqués par une très petite face transversale. Dans un pareil élément, l'équateur (le contour de la base commune des deux cônes) devrait présenter le maximum de la tension positive, chaque extrémité un maximum de tension négative. Sur le revêtement latéral du double cône, la tension positive devrait décroître graduellement de l'équateur aux sommets, à cause de la disposition en gradins des molécules superficielles, qui rend leur action analogue à celle d'une pile. Près de la plaie, après la constitution définitive de la face de démarcation, les faces terminales des

[1]) Plus rigoureusement, des sections obliques, à cause de la figure généralement fusiforme des cellules.

cônes se comporteraient donc comme des sections purement transversales, et les surfaces latérales des cônes comme des sections obliques. Les cônes finissant en général, ainsi que nous l'apprend le microscope, en pointes très minces, c'est-à-dire, terminées par une face presque punctiforme, et ces cônes étant séparés les uns des autres par des interstices relativement larges, remplis d'une masse inactive et conductrice (la substance des cellules mortes), la partie de la négativité totale de la section transversale, qui provient des faces terminales, ne pourra avoir qu'une valeur absolue très petite. Il en sera de même, mais dans une mesure encore beaucoup plus forte, de la partie de cette négativité totale qui provient des surfaces latérales des cônes, attendu que ces surfaces, bien qu'étant des sections obliques, peuvent, à cause de leur inclinaison extrêmement faible sur l'axe longitudinal des cellules, être presque assimilées à des sections purement longitudinales. Si l'on considère maintenant qu'en réalité une petite partie seulement des cellules se trouvent dans la position favorable que nous venons de supposer, c'est-à-dire dans la position normale à la section, il semble qu'on n'ait besoin d'aucune hypothèse auxiliaire pour expliquer, en partant de la théorie moléculaire, la réduction rapide de la force électromotrice à une petite fraction de la valeur qui peut encore être atteinte par le rafraîchissement de la section. Néanmoins, si quelqu'un, invoquant la grandeur de la force électromotrice des sections récentes, voulait prétendre qu'en dépit de toutes les circonstances énumérées la section artificielle devrait encore manifester une négativité sensible tant qu'il reste une force latente notable, on ne saurait, au point de vue de la théorie moléculaire, lui opposer un argument sans réplique; mais on pourrait le combattre en admettant une nouvelle hypothèse, à savoir, que chaque cellule non lésée est revêtue, au moins à ses faces terminales, d'une couche parélectronomique.

Or, au point de vue en question, une pareille hypothèse devient très plausible, si l'on ne s'en tient pas au cœur de la grenouille, mais qu'on étende le cercle des investigations au cœur

d'autres animaux, aux muscles lisses et surtout aux troncs nerveux. Tous ces organes sont formés, d'après le même principe que le cœur de grenouille, de cellules courtes, mourant isolément. Chez tous, par conséquent, quelque temps après qu'une section transversale y a été pratiquée, on n'aura plus affaire, au moins essentiellement, qu'à l'action des cellules intactes situées immédiatement sous les cellules mortes de la plaie. On peut donc espérer que l'étude de la force après la mort, et en particulier celle de l'effet produit par le rafraîchissement de sections transversales artificielles, nous éclairera sur les propriétés électromotrices des surfaces cellulaires non lésées à l'intérieur des tissus qui viennent d'être nommés. C'est cette étude que nous allons maintenant aborder.

Expériences sur le cœur d'autres animaux.

En ce qui concerne le mode d'expérimentation, les détails donnés à propos de la grenouille s'appliquent également ici. Les animaux étant décapités, le cœur était extrait avec toute la rapidité et les précautions possibles, puis coupé sous l'oreillette, pour arrêter les tressaillements spontanés. Les ventricules seuls étaient mis en expérience. Chez beaucoup d'animaux on étudia aussi, comme termes de comparaison, les variations qu'éprouvait avec le temps la force électromotrice de sections transversales artificielles faites sur les muscles ordinaires.

Les résultats généraux furent les mêmes que chez la grenouille: en premier lieu, abaissement beaucoup plus rapide de la force manifeste du cœur que de celle des muscles ordinaires; en second lieu, dans le cœur, relèvement très considérable de la force par le rafraîchissement de la section, inefficacité de cette opération chez les muscles ordinaires.

Le premier de ces résultats ressort de la comparaison des deux tableaux suivants.

La force électromotrice, entre la section transversale faite à la base du cœur et la surface naturelle à la pointe de l'organe, s'abaissa chez

Anguilla fluviatilis,	d'après	1	exp.,	en	5	min.,	à	41,1	%			
E [1]) = 0,0265 D.	„	1	„	„	10	„	„	18,1	„			
	„	1	„	„	15	„	„	2,7	„			
Triton cristatus	„	1	„	„	5	„	„	36,3	„			
E = 0,0124 D.												
Tropidonotus natrix	„	1	„	„	5	„	„	77,7	„			
E = 0,036 D.	„	1	„	„	10	„	„	63,9	„			
Testudo graeca	„	1	„	„	5	„	„	77,3	„			
E = 0,022 D.	„	1	„	„	30	„	„	36,4	„			
Columba livea	„	6	„	„	5	„	„	66,0	„	max.	75,1	min. 55,5
E = 0,0458 D.	„	9	„	„	10	„	„	44,8	„	„	68,1	„ 8,3
	„	4	„	„	10—20	„	„	43,1	„	„	55,6	„ 25,0
Cygnus olor	„	1	„	„	5	„	„	50,0	„			
E = 0,0168 D.	„	1	„	„	10	„	„	45,9	„			
	„	1	„	„	20	„	„	35,0	„			
Mus musculus	„	7	„	„	5	„	„	35,0	„	„	58,9	„ 25,6
var. albinos	„	8	„	„	10	„	„	19,0	„	„	42,8	„ 0,0
E = 0,040 D.	„	7	„	„	15	„	„	12,7	„	„	19,0	„ 0,0
	„	3	„	„	30	„	„	6,6	„	„	12,9	„ 0,0
Mus rattus	„	14	„	„	5	„	„	53,3	„	„	86,3	„ 28,9
var. albinos	„	14	„	„	10	„	„	33,2	„	„	55,3	„ 23,7
E = 0,0446 D.	„	10	„	„	15	„	„	20,9	„	„	38,2	„ 6,1
Lepus cuniculus	„	11	„	„	5	„	„	79,5	„	„	88,7	„ 44,7
E = 0,0363 D.	„	10	„	„	10	„	„	60,4	„	„	79,2	„ 24,5
	„	9	„	„	15	„	„	42,0	„	„	64,6	„ 19,2
	„	5	„	„	30—60	„	„	26,7	„	„	31,3	„ 20,4

D'un autre côté, dans des conditions aussi semblables que possible, la force entre la section transversale artificielle et la section longitudinale naturelle de muscles ordinaires s'abaissa, ou s'éleva, chez

[1]) Par E j'entends ici, comme dans tout les cas suivants, l'intensité initiale *moyenne* de la force, telle qu'elle résulte de l'ensemble des expériences relatées dans le tableau.

[2]) On donnait aux préparations musculaires, en moyenne, les dimensions d'un grand ventricule de grenouille.

Anguilla fluviatilis,	d'après	7	exp.,	en 5	min.	à	93,9 % ;	max.	120,0,	min.	75,0
(muscles latéraux)	„	7	„	„10	„	„	79,9 „	„	111,0	„	50,0
E = 0,0276 D.	„	7	„	„15	„	„	79,4 „	„	120,0	„	45,0
	„	7	„	„75	„	„	48,4 „	„	63,3	„	18,8
Testudo graeca	„	2	„	„ 5	„	„	102,7 „	„	108,5	„	96,9
(muscles de la poitrine)	„	2	„	„10	„	„	104,7 „	„	113,3	„	96,1
E = 0,0291 D.	„	2	„	„15	„	„	104,1 „	„	113,0	„	95,2
	„	2	„	„20	„	„	102,4 „	„	111,1	„	93,8
	„	1	„	„40	„	„	91,6 „	„		„	
	„	1	„	„ 2	h.	„	57,7 „	„		„	
	„	2	„	„24	„	„	27,5 „	„	28,4	„	26,6
Columba livea	„	3	„	„ 5	min.	„	84,5 „	„	85,3	„	83,5
(muscles de la poitrine	„	3	„	„10	„	„	70,5 „	„	71,2	„	69,7
et de la cuisse)	„	3	„	„15	„	„	62,0 „	„	63,1	„	60,6
E = 0,076 D.	„	3	„	„20	„	„	53,6 „	„	55,7	„	51,9
	„	5	„	„60	„	„	22,6 „	„	33,6	„	15,4
Mus musculus	„	4	„	„ 5	„	„	88,7 „	„	105,6	„	80,4
var. albinos	„	4	„	„10	„	„	89,7 „	„	104,2	„	83,7
(muscles de la cuisse)	„	4	„	„15	„	„	79,7 „	„	88,9	„	67,4
E = 0,030 D.	„	4	„	„ 4	h.	„	16,5 „	„	34,7	„	8,8
Mus rattus	„	6	„	„ 5	min.	„	88,5 „	„	98,4	„	82,4
var. albinos	„	6	„	„10	„	„	81,9 „	„	89,1	„	73,2
(adducteurs de la cuisse)	„	6	„	„15	„	„	77,4 „	„	83,3	„	69,5
E = 0,0424	„	6	„	„60	„	„	52,0 „	„	67,2	„	45,8
Lepus cuniculus	„	8	„	„ 5	„	„	80,8 „	„	92,9	„	71,8
(adducteurs de la cuisse)	„	8	„	„10	„	„	72,4 „	„	82,5	„	54,9
E = 0,0423 D.	„	8	„	„15	„	„	63,5 „	„	74,8	„	49,3
	„	8	„	„60	„	„	42,6 „	„	60,2	„	19,1
	„	8	„	„24	h.	„	0,0 „	„	0,0	„	0,0

A la suite du rafraîchissement, opéré en enlevant avec des ciseaux une mince couche de substance musculaire, la force du cœur s'éleva chez

Anguilla fluviatilis,	d'après	1	exp.,	en	15	min.,	de 2,7 %	à 71,7 % :	accr.	+	69,0 %
	„	1	„	„	30	„	„ 0,0 „	„ 53,6 „	„	+	53,6 „
	„	1	„	„	1 h. 30	„	„ 0,0 „	„ 43,4 „	„	+	43,4 „

Triton cristatus,	d'après	1	exp.,	en	5 min.,	de	36,3 %	à 65,7 %	: accr.	+29,4 %
Tropidonotus natrix	„	1	„	„	20 „	„	61,1 „	„ 108,9 „	„	+47,8 „
	„	1	„	„	1h. 20 „	„	11,0 „	„ 50,5 „	„	+49,5 „
	„	1	„	„	2h.	„	2,5 „	„ 39,1 „	„	+36,6 „
	„	1	„	„	4h.	„	0,3 „	„ 11,1 „	„	+11,1 „
Testudo graeca	„	1	„	„	35 „	„	32,7 „	„ 53,6 „	„	+20,9 „
	„	1	„	„	50 „	„	22,7 „	„ 44,5 „	„	+21,0 „
Cygnus olor	„	1	„	„	20 „	„	35,0 „	„ 91,4 „	„	+56,4 „
	„	1	„	„	45 „	„	30,0 „	„ 68,3 „	„	+38,3 „
Pica caudata	„	1	„	„	20 „	„	0,0 „	„ 23,3 „	„	+23,3 „
Columba livea	„	4	„	„	10-20 „	„	43,1 „	„ 60,9 „	„	+17,8 „
E = 0,0478 D.	„	4	„	„	30 „	„	0,0 „	„ 4,2 „	„	+ 4,2 „
Mus musculus	„	2	„	„	10-15 „	„	4,8 „	„ 11,9 „	„	+ 7,1 „
var. albinos	„	2	„	„	15-20 „	„	25,0 „	„ 47,8 „	„	+22,8 „
E = 0,04 D.	„	1	„	„	45 „	„	15,3 „	„ 31,2 „	„	+15,9 „
	„	1	„	„	60 „	„	11,9 „	„ 21,5 „	„	+10,6 „
Mus rattus	„	2	„	„	10-20 „	„	19,2 „	„ 58,8 „	„	+39,6 „
var. albinos	„	3	„	„	20-30 „	„	24,8 „	„ 64,6 „	„	+39,8 „
E = 0,0446 D.	„	3	„	„	30-60 „	„	11,8 „	„ 55,2 „	„	+43,4 „
	„	3	„	„	1h.-2h.	„	8,9 „	„ 42,1 „	„	+33,2 „
Lepus cuniculus	„	3	„	„	10-20 „	„	40,9 „	„ 59,2 „	„	+18,3 „
E = 0,0354 D.	„	2	„	„	20-30 „	„	27,9 „	„ 71,7 „	„	+43,8 „
	„	5	„	„	30-60 „	„	25,5 „	„ 48,1 „	„	+22,6 „

D'un autre côté, le rafraîchissement de muscles ordinaires, dans des conditions du reste semblables, donna un accroissement ou bien négatif, ou bien presque imperceptiblement positif: la force s'abaissa ou s'éleva, en effet, chez

Columba livea,	d'après	3	exp.,	en	20 min.,	de	53,6 %	à 45,4 %	: accr.	— 8,2 %
(muscles de la cuisse)	„	5	„	„	60 „	„	22,6 „	„ 20,3 „	„	— 2,3 „
E = 0,0760 D.										
Mus musculus	„	4	„	„	15 „	„	79,7 „	„ 71,5 „	„	— 8,2 „
var. albinos										
(muscles de la cuisse)	„	4	„	„	4 h.	„	16,5 „	„ 4,8 „	„	—11,7 „
E = 0,030 D.										

Mus rattus var. albinos (adducteurs de la cuisse) E = 0,0402 D.	d'après 3 exp.,	en 65 %	min.,	50,7 %	à 42,5 %	: accr.	— 8,2 %			
Lepus cuniculus (adducteurs de la cuisse) E = 0,045 D.	„ 7	„	„ 15	„	„ 65,9	„ „ 66,3	„	„	„	— 0,4
	„ 5	„	„ 60	„	„ 48,1	„ „ 47,2	„	„	„	+ 0,9

Le décroissement d'intensité, qui se montre presque sans exception dans le dernier tableau, ne dépendait sans doute essentiellement que du raccourcissement de la préparation par suite du renouvellement de la section. Cela est confirmé par la circonstance que l'accroissement négatif est presque insensible pour le lapin. Les préparations provenant de celui-ci, en effet, avaient été prises assez grandes (2 cm. de long.) pour que la partie dérivée, comprise entre les électrodes, ne fût raccourcie que d'une faible fraction de sa longueur par le rafraîchissement de la section. Les préparations les plus petites (celles de la souris) montrent le plus fort décroissement d'intensité.

La même influence doit nécessairement se faire sentir aussi pour les préparations du cœur, généralement petites. Malgré cela, on y constate sans exception un accroissement positif. Il en résulte que la force manifeste, au moment du rafraîchissement, devait être tombée à une fraction encore plus petite de la force latente (correspondant à des dimensions égales de la préparation) que ne l'indiquent les chiffres de mes expériences. Or cette dernière fraction est déjà si faible, en beaucoup de cas, que sa petitesse ne devient compréhensible au point de vue de l'hypothèse moléculaire, du moins chez les oiseaux et les mammifères, qu'en admettant la parélectronomie des cellules actives de la surface de démarcation.

On sait que chez les oiseaux et les mammifères les cellules du muscle ventriculaire ne sont pas allongées et fusiformes, comme chez les grenouilles, mais courtes, cylindriques, terminées par de larges faces perpendiculaires à l'axe longitudinal. Sur

une section vraiment normale à la direction des fibres, la surface de démarcation ne sera donc pas formée de dents allongées et pointues, mais de dents courtes, largement tronquées. Les larges faces terminales de ces dents, ainsi que celles des cellules qui limitent leurs interstices du côté profond, agiront donc au dehors comme autant de sections purement transversales. En fait, il est vrai, ces conditions ne sont jamais rigoureusement remplies, à cause de la disposition très compliquée des fibres. Elles sont toutefois réalisées approximativement lorsque, un cœur de lapin ou de rat ayant été coupé en travers à environ deux millimètres au-dessous du sillon transversal, on mène, parallèlement à l'axe longitudinal du cœur, une section droit à travers la paroi antérieure du ventricule gauche, et qu'alors on dérive le courant à peu près du centre du tiers antérieur de cette section (le plus rapproché de la base), pris pour section transversale. Le microscope montre qu'en ce point il y a, sur une étendue de plusieurs millimètres carrés, des sections transversales presque pures (de fibres circulaires). Les préparations employées dans les expériences du tableau ci-dessus étaient de cette nature. En dépit de cela, le rafraîchissement fit monter la force au double, au triple, ou même à un multiple plus élevé de sa valeur antérieure.

On pourrait s'étonner de ce que la force manifeste du cœur, à un moment où elle paraît presque entièrement éteinte chez la grenouille, conserve souvent encore chez les mammifères et les oiseaux une valeur assez notable, par exemple, chez le lapin, au bout de 30—60 minutes, encore un quart de la valeur primitive. A raison de la moindre longueur des cellules et de la durée plus courte de survie des tissus chez les animaux à sang chaud, on aurait plutôt attendu le contraire. Le fait cesse toutefois de surprendre, à mon avis, lorsqu'on considère que la forme des cellules et la manière dont elles se présentent à la surface de section semblent plus favorables à la persistance de l'action extérieure que chez les animaux à sang froid, et surtout lorsqu'on se rappelle que les cellules du muscle cardiaque sont unies beaucoup plus intimement entre elles chez les verté-

brés à sang chaud (au moins chez les animaux adultes) que chez les vertébrés inférieurs. Des observateurs antérieurs ont déjà signalé le fait que la substance musculaire du cœur se résout beaucoup moins facilement en ses cellules individuelles chez les premiers de ces animaux que chez les seconds. A la suite de la mort spontanée cette désagrégation n'est chez eux nullement évidente, et par l'emploi des meilleurs agents chimiques d'isolation (potasse à 35 %, acide nitrique concentré) elle s'opère d'une manière moins nette et moins complète que chez les grenouilles et les poissons. Lorsque la nutrition par le sang a cessé, comme dans nos préparations, il se peut donc que la propagation de la mort de cellule à cellule, l'attaque de la couche cellulaire profonde par les cellules d'où la vie se retire directement à la suite de l'injure mécanique, il se peut, dis-je, que cette action se produise plus facilement et avec plus de force dans le cœur des animaux à sang chaud qu'entre les cellules fibreuses, si aisément disjointes, du cœur des animaux à sang froid.

Du reste, au point de vue de l'hypothèse moléculaire, on pourrait aussi se tirer d'affaire en admettant — supposition encore toute gratuite, il est vrai — que la surface des cellules non lésées est douée d'un degré de parélectronomie insuffisant pour masquer entièrement les différences de tension qui préexistent à l'intérieur.

Mais, quelque théorie qu'on adopte, mes expériences montrent que, chez tous les animaux vertébrés, de même que le cœur entier, *toutes les cellules musculaires individuelles dont il se compose, à l'état d'intégrité et de repos, n'exercent au dehors aucune ou presque aucune action électromotrice*

Expériences sur les muscles lisses.

La préparation dont je me suis servi dans la plupart des cas est la membrane musculeuse de l'estomac de la grenouille. L'estomac était coupé près du pylore et du cardia, extrait avec une portion aussi grande que possible du mésogastre et attaché,

médiocrement tendu, sur une plaque de liége au moyen de deux épingles. A l'aide de fins ciseaux introduits entre la musculeuse et la muqueuse, on fendait alors la membrane musculeuse le long de la grande courbure, puis on la détachait avec précaution de la membrane muqueuse, ou *vice-versâ*, ce qui s'exécutait sans la moindre difficulté, notamment sans aucune perforation ou dilacération d'une des deux membranes. La musculeuse, qui après sa séparation de la muqueuse se roule d'abord en dehors dans un état de contraction spasmodique, était appliquée par sa face interne sur un tube de verre épais d'environ 3 mm., auquel elle adhérait par son humidité; ce tube pouvait se mouvoir sur un support, autour d'un genou à coquilles. Sur le même support était fixée une électrode en argile qui, par l'intermédiaire du lambeau mésogastrique, dérivait le courant de la petite courbure, par conséquent, de la section longitudinale naturelle; une seconde électrode, mobile sur un support particulier, dérivait le courant de la section artificielle. Ordinairement on dérivait le courant, attendu que l'action était alors plus énergique, de la section longitudinale artificielle de l'estomac, laquelle représente essentiellement une coupe transversale (des fibres circulaires); la dérivation se faisait, en général, sur une longueur d'environ 5 millimètres. Toutes les mesures de précaution, recommandées à l'occasion du cœur, étaient d'ailleurs observées.

Lorsque l'estomac était pris sur une grenouille qui venait d'être tuée par la destruction du système nerveux central, et que l'examen en était fait immédiatement, on ne trouvait généralement que des différences de tension tout à fait insignifiantes. La section transversale se montrait, à la vérité, toujours négative, mais l'intensité restait fréquemment au-dessous de 0,001 D. et, en tout cas, inférieure de beaucoup aux valeurs dont il sera question tout à l'heure. Cela s'explique en partie par l'état spasmodique dans lequel la membrane musculeuse persiste souvent encore longtemps après la séparation de la muqueuse, et en partie aussi par l'abaissement rapide de la force de la section transversale artificielle, abaissement que nous constaterons plus loin.

Quand l'estomac n'était extrait du corps de la grenouille (conservé jusqu'à ce moment dans l'enceinte humide) que plusieurs heures ou un jour après la destruction des grands centres, la section artificielle présentait dans la plupart des cas, immédiatement après qu'elle avait été faite, une tension négative assez forte. Le courant étant dérivé d'une large étendue de la section transversale et mesuré aussitôt que possible après l'exécution de la coupe, on trouva, par exemple, comme moyenne de

3 exp., 4 ou 5 heures après la destruction des grands centres, 0,0064 D. (max. 0,0093, min. 0,0039),

7 exp., 24 heures après la destruction des grands centres, 0,0013 D. (max. 0,0174, min. 0,0013).

Chez quatre grenouilles paralysées par le curare et conservées ainsi deux jours dans la chambre humide, j'obtins pour la force, 1 heure après la destruction des grands centres, la valeur moyenne 0,003 D. (max. 0,0045, min. 0,0018 D.).

La plupart des pièces qui montraient une force notable aussitôt après la préparation se comportaient ensuite, sous les rapports essentiels, comme nos préparations du cœur: la force tombait rapidement à zéro ou à près de zéro, pour se relever notablement quand la section était rafraîchie.

C'est ainsi que la force entre la section transversale artificielle et la section longitudinale naturelle s'abaissa

dans	10	exp.,	au bout de	5	min.,	en moyenne à	42,8	%	(max.	68,9,	min.	0,0	%)
„	5	„	„ „	10	„	„ „	16,4	„	„	33,3	„	0,0	„
„	6	„	„ „	15	„	„ „	0,9	„	„	6,7	„	0,0	„

Avec des préparations plus vieilles (de 24 heures et plus), j'observai quelquefois un abaissement beaucoup plus lent de la force, en valeur absolue comme en valeur relative.

A la suite du rafraîchissement de la section, la force s'éleva:

a) chez des grenouilles non empoisonnées, tuées un jour avant la préparation de la membrane musculeuse,

dans	5	exp.,	après	5	min.,	de	14,2	%	à	132,1	%	: accroiss.	+ 117,9 %
„	1	„	„	30	„	„	22,1	„	„	168,5	„	„	+ 146,1 „
„	1	„	„	24	h.	„	9,0	„	„	75,0	„	„	+ 66,0 „

b) chez quatre grenouilles paralysées depuis deux jours par le curare,

dans 2 exp., après 10 min., de 11,1 % à 100 %: accroiss. + 88,9 %
„ 2 „ „ 15 „ „ 2,3 „ „ 72,7 „ „ + 70,4 „

c) chez 15 grenouilles non empoisonnées, chez qui la valeur initiale de E n'avait pas été mesurée ou bien avait été trouvée inférieure à 0,001 D., après 24 heures de séjour de la préparation musculeuse dans l'enceinte humide, de 0,00026 D. (max. 0,0015 D., min. 0 D.) à 0,0077 D. (max. 0,0160 D., min. 0,3012 D.). L'accroissement moyen était donc de + 0,00744 D.; le plus fort mesurait + 0,0154 D., le plus faible + 0,00007 D.

L'expérience confirme donc notre attente, et nous autorise à formuler cette proposition: *les fibro-cellules musculaires lisses* (au moins celles de l'estomac de la grenouille), *à l'état d'intégrité et de repos*, *n'exercent au dehors aucune action électromotrice sensible.* [1])

Voyons maintenant ce que nous apprennent les nerfs.

Expériences sur les nerfs.

Il a déjà été rappelé ci-dessus, et j'ai montré ailleurs en détail, que dans toute fibre nerveuse coupée il se produit une dégénérescence, aboutissant à la destruction de la moelle et du cylindre-axe, qui à partir de la surface de section se propage jusqu'à la limite cellulaire la plus proche (l'étranglement de Ranvier), sans jamais la dépasser; il en résulte, comme je l'ai également déjà indiqué, que la section transversale artificielle se change peu à peu en une section naturelle, en ce sens, qu'à la surface de démarcation entrent en jeu, sous le rapport

[1]) Ce résultat ne semble guère favorable à l'hypothèse, que j'ai émise antérieurement, de la nature myogène des courants de la peau de la grenouille. Mais il faut remarquer, comme je l'avais déjà dit, que les extrémités supposées actives des cellules musculaires se trouvent, au pôle supérieur des follicules, en contact direct avec la sécrétion cutanée, c'est-à-dire, dans des conditions qui ont évidemment une forte influence „excitatrice." Aussi les cellules ont-elles, à ces extrémités, un aspect tout différent de celui de leurs autres parties,

électromoteur, les terminaisons naturelles des fibro-cellules nerveuses intactes qui se trouvent immédiatement au-dessous. Si donc ces sections transversales naturelles des cellules de Ranvier étaient inactives à l'état de repos, on devait s'attendre, premièrement, à ce que la force entre la section longitudinale naturelle et la section transversale artificielle, une fois tombée au-dessous de sa valeur initiale, pourrait être relevée au moyen du rafraîchissement de la section; et, en second lieu, que la grandeur de l'accroissement positif ainsi obtenu augmenterait, entre certaines limites, avec la longueur de la partie enlevée pour le rafraîchissement. De plus, en supposant que le bout restant du nerf conservât une longueur suffisante, l'accroissement devait atteindre un maximum lorsque la longueur de la partie enlevée serait de 1½—2 mm., car telle est environ, dans les cas extrêmes, la longueur d'une cellule de Ranvier.

En ce qui concerne le second point on ne possédait encore aucune donnée, et quant au premier tout se bornait à une remarque incidente de M. du Bois-Reymond [1]), d'après laquelle, d'ailleurs, les prévisions ci-dessus énoncées ne se réaliseraient pas. Mais, rien n'étant connu au sujet des conditions des expériences sur lesquelles est fondée la remarque de M. du Bois-Reymond, je jugeai nécessaire d'entreprendre de nouvelles recherches, qui effectivement ne tardèrent pas à fournir d'importants résultats.

Je me contenterai, comme pour le cœur et les muscles lisses, de relater les expériences faites sur des préparations excisées, mais encore vivantes. Sous le rapport des phénomènes microscopiques de l'extinction de la vie dans les cellules atteintes par la section, ces préparations se comportent, dans les premiers temps, à peu près comme lorsque les parties étaient encore nourries par le sang. Quelques heures après que la section a été pratiquée, les premiers effets de la dégénération traumatique — reconnaissables surtout à ce que la substance médullaire est colorée plus faiblement par l'acide osmique et se détache de la

[1]) *Ueber die Erscheinungsweise* etc., p. 308.

gaîne de Schwann — ont déjà progressé jusqu'aux étranglements ranviériens les plus proches, où l'action s'arrête alors invariablement. Il n'est donc pas douteux qu'à la section transversale du nerf excisé se constitue aussi cette surface de démarcation où des cellules encore vivantes touchent à des cellules mortes.

La plupart des expériences eurent lieu sur le nerf sciatique de grands et forts exemplaires de *Rana esculenta*. Les animaux étaient tués de la manière habituelle, par la destruction des grands centres nerveux au moyen d'une aiguille introduite par la voûte du crâne; immédiatement après, le nerf était enlevé avec les plus grandes précautions depuis le jarret jusqu'à la colonne vertébrale, puis partagé en un bout périphérique d'environ 20—25 mm. de longueur et un bout central un peu plus long. Les sections transversales (section centrale du bout périphérique et section périphérique du bout central), qui devaient servir à la dérivation du courant, étaient pratiquées avec de petits ciseaux très tranchants, et toujours aussi perpendiculairement que possible à l'axe longitudinal des fibres. La dérivation se faisait de telle sorte, que la surface entière de la section transversale adhérait à l'une des électrodes d'argile, que la section longitudinale était couchée en travers sur l'autre électrode, et que la partie extrapolaire du nerf pendait librement dans l'air sur une longueur d'environ 10 mm. et plus. Quand on opérait sur le bout central du nerf, on veillait spécialement à ce que la dérivation de la section longitudinale se fît à une distance suffisante des tronçons des branches fémorales coupées et, dans chaque série d'expériences exécutées sur la même préparation, toujours au même point de la section longitudinale. Des soins particuliers étaient aussi pris pour que la chambre humide fût toujours bien saturée de vapeur d'eau.

Comme le courant des nerfs, dans les conditions susdites, s'affaiblit en général beaucoup plus lentement que celui du cœur et des muscles lisses, les mesures d'intensité se faisaient ordinairement à des intervalles plus longs (d'un quart d'heure et plus), pendant lesquels les préparations restaient, sans contact

avec les électrodes, sur une lame de verre dans la chambre humide. Les quatre préparations provenant d'une seule et même grenouille étaient toutefois, en règle générale, soumises à la mesure aussi rapidement que possible l'une après l'autre, à des intervalles de 2 à 4 minutes : alternativement d'abord le sciatique droit et le sciatique gauche, et alternativement aussi, d'abord le bout central et le bout périphérique des deux nerfs.

Dans les conditions qui viennent d'être indiquées, la force électromotrice fut trouvée décroissante dès le début. Elle tomba:

A) 1—2h après la première section,

a) dans le bout *central* (E [1]) = 0,0172 D.), d'après 6 exp., à 49,5%
(max. 59,8, min. 42,4),

b) dans le bout *périphérique* (E = 0,0148 D.), d'après 6 exp., à 44,2%
(max. 57,1, min, 25,4),

ainsi, en moyenne des 12 expériences, à 46,8% de la valeur initiale.

B) 20—24h après la première section,

a) dans le bout *central* (E = 0,0156 D.), d'après 25 exp., à 4,8%
(max. 31,3, min. — 5,0),

b) dans le bout *périphérique* (E = 0,0171 D.), d'après 25 exp., à 8,5%
(max. 35,5, min. — 4,2),

ainsi, en moyenne des 50 expériences, à + 6,7% de la valeur initiale. Dans 29 de ces 50 expériences, la force était, au bout de 20—24 heures, sensiblement nulle ou très faiblement négative; de ces 29 cas, 15 se rapportaient au bout périphérique.

Après qu'une nouvelle section transversale eut été pratiquée, à une distance de 2—4 mm. de la première, la force remonta, dans les expériences

sub A *a* (bout central), de 49,5 à 104,9%: accroiss. + 55,4%,
„ B *b* („ périphér.) „ 44,2 „ 101,7 „ „ + 57,5 „ ,

ainsi, en moyenne des 12 expériences *sub* A, de 48,8 à 103,3%: accroissement + 56,5%. Les maxima observés après le rafraîchissement de la section s'élevaient pour A *a* à 120,4%, pour

[1]) E désigne de nouveau la force électromotrice moyenne déduite de toutes les expériences.

A *b* à 113,0%; les minima pour A *a* à 88,7%, pour A *b* à 89,2%.

D'autre part, après le rafraîchissement à une distance de 2—4 mm. de la première section transversale, la force remonta, dans les expériences

sub B *a* (bout central), de 4,8 à 115,4%: accroiss. + 110,6%,
„ B *b* („ périphér.) „ 8,5 „ 117,4 „ „ + 108,9 „ ,
ainsi, en moyenne des 50 expériences *sub* B, de 6,7 à 116,3%: accroissement + 109,7%.

Les maxima observés après le rafraîchissement s'élevaient pour B *a* à 208,8%, pour B *b* à 197,6%; les minima pour B *a* à 31,3%, pour B *b* à 35,4%. [1])

L'accroissement de force se produisait toujours d'emblée avec sa pleine valeur, après quoi la force retombait très graduellement, pour recevoir un nouvel accroissement à la suite d'un nouveau rafraîchissement de la section.

Ces expériences témoignent donc nettement en faveur de l'inactivité des sections transversales naturelles des fibres nerveuses non lésées, et d'autant plus nettement que, dans les conditions indiquées, la force latente des nerfs non-seulement ne s'abaissa pas, comme la force manifeste, mais éprouva même une surélévation très notable après la mort. Il est digne de remarque, sous ce rapport, que dans beaucoup de cas où la force manifeste était tombée à zéro au bout de 20—24^{h}, la grandeur absolue de la force latente fut trouvée supérieure à 0,035 D.; dans deux cas elle s'éleva même, après le rafraîchissement, de zéro à plus de 0,040 D. Si une fraction même très petite de cette force avait été en action dans les vieilles sections trans-

[1]) Un fait méritant d'être noté, c'est que le maximum absolu observé dans ces expériences (*sub* B *a*) pour l'intensité du courant des nerfs s'élevait à 0,0415 D, valeur qui surpasse de beaucoup les plus fortes de celles qu'a trouvées jusqu'ici M. du Bois-Reymond (0,022 chez la grenouille, 0,026 dans le sciatique du lapin). Une fois seulement, en opérant sur le nerf sciatique très frais d'une grenouille, j'ai obtenu une valeur encore plus forte: 0,0469 D. Comme le compensateur avait été gradué immédiatement avant l'observation, et que la constance de la pile-étalon avait été constatée, on ne peut guère supposer qu'une erreur ait été commise.

versales des fibres, elle n'aurait pu échapper à l'observation. [1])

Dans l'accroissement de la force latente après la mort se trouve une des raisons pour lesquelles la force manifeste de la section artificielle du nerf diminue si lentement en comparaison de celle du cœur et des muscles lisses. Du reste, on pourrait se passer de cette raison, car il suffirait, pour expliquer le fait, d'invoquer la longueur des fibro-cellules nerveuses, qui est en moyenne au moins dix fois celle des deux autres espèces de cellules, et ensuite l'activité comparativement moindre de la nutrition dans les fibres nerveuses, qui autorise à y admettre une progression spécifiquement plus lente de la mort.

Jamais je n'ai observé, dans les conditions susdites, un accroissement de la force *manifeste*. Mais cet accroissement peut apparaître très nettement, au moins dans les premiers temps après que la préparation a été faite, lorsque les conditions sont différentes. C'est ainsi que je ne l'ai jamais vu faire défaut quand les grenouilles, après la destruction des grands centres nerveux et l'excision du cœur, ou après un autre traitement propre à supprimer la circulation sanguine, avaient été laissées, recouvertes de leur peau, pendant un jour dans la chambre humide,

---

[1]) Je dois faire remarquer, incidemment, que mes résultats rendent très douteux, quant à la signification que lui a encore attribuée récemment M. du Bois-Reymond (*Arch. f. Anat. u. Phys.* 1875, p. 651), le fait observé par M. Bernstein (Pflüger's *Archiv*, t. 1, 1868, p. 193 et 194), à savoir, qu'en cas d'excitation énergique la force de l'oscillation négative peut surpasser maintes fois celle du courant des nerfs à l'état de repos. Il est probable que dans ces cas la force manifeste du nerf était déjà beaucoup affaiblie, mais la force latente encore considérable. Or, c'est uniquement la grandeur de cette dernière qui importe. Si la preuve était fournie que la force de l'oscillation peut surpasser en valeur la force latente de la même section nerveuse, le fait aurait incontestablement une grande importance. Mais cette preuve reste encore à faire. Dans le cœur, ainsi que je l'ai montré précédemment (*Proc. verb. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam*, no. 2, séance du 28 Juin 1873), une inversion de la force entre la section transversale et la section longitudinale se laisse très fréquemment observer lors de la systole. Cela n'a jamais lieu, toutefois, que lorsque la force manifeste est déjà affaiblie. La rapidité avec laquelle cet affaiblissement se produit fait comprendre la fréquence de l'inversion du courant.

avant que le nerf fût préparé. L'accroissement de la force manifeste commençait alors tout de suite et n'était pas encore terminé au bout d'une demi-heure. Par exemple, la force s'éleva dans ces conditions, en une demi-heure, comme moyenne de 12 expériences, de 0,013 D. à 0,0195 D., et en une heure, comme moyenne de 7 expériences faites sur la même grenouille, de 0,0135 à 0,0218 D. Le rafraîchissement de la section transversale faisait monter la force encore plus haut. Si, avant de pratiquer la section transversale et de mesurer la force, on mettait à nu les nerfs de grenouilles toutes pareilles, et qu'en cet état on les laissait pendant un jour ou plus dans la chambre humide, l'accroissement ultérieur de la force manifeste ne s'observait plus. Mais la force présentait alors dès le premier instant une valeur plus élevée. L'accroissement sus-mentionné était probablement dû à l'exhalation lente de l'acide carbonique qui, dans les conditions indiquées, s'était accumulé dans les nerfs et qui provenait sans doute en grande partie des tissus (muscles) environnants. L'infériorité habituelle des tensions initiales serait imputable à l'action de l'acide carbonique, conformément aux expériences de M. J. Ranke, qui a vu l'excitabilité des nerfs décroître sous l'influence de ce gaz et augmenter de nouveau à mesure qu'il s'exhalait. Je ne m'étendrai toutefois pas davantage sur ces phénomènes et sur les rapports qu'ils peuvent avoir, soit avec l'accroissement *post-mortem* de la force latente, signalé ci-dessus et se produisant dans des conditions différentes, soit avec l'accroissement *post-mortem* de la force des muscles ordinaires, découvert par M. du Bois-Reymond [1]); ces considérations ne touchent pas directement la question que nous avons spécialement en vue.

Par contre, il importe de savoir si la grandeur de l'accroissement d'intensité, déterminé par le rafraîchissement de la section, présente avec la longueur de la partie enlevée un rapport de dépendance tel que l'exige la supposition de l'inactivité des sections transversales naturelles des fibro-cellules nerveuses. Les expériences suivantes répondent à cette question.

[1]) *Ueber die Erscheinungsweise*, etc., p. 279 et suiv.

Sur 27 préparations du nerf sciatique, — 14 du bout central et 13 du bout périphérique, — fournies par 8 grenouilles qui venaient d'être tuées de la manière sus-indiquée, on mesura la force immédiatement après avoir pratiqué la section transversale; les préparations furent alors laissées pendant un jour sur une lame de verre dans la chambre humide, après quoi on mesura de nouveau la force de l'ancienne section transversale (*a*), puis successivement celle de quatre nouvelles sections (*b*, *c*, *d*, *e*), pratiquées environ une minute l'une après l'autre, en des points qui correspondaient aussi exactement que possible à ½, 1, 2 et 4 millim. de distance de la section transversale primitive. La force initiale (moyenne des 27 mesures 0,0177 D., max. 0,037 D., min. 0,010 D.) étant représentée par 100, on trouva, au bout de 24 heures, pour la force de

a)	section ancienne,					en moyenne,	0,6,	max.	11,7,	min.	0,0
b)	„	nouvelle, à ½ mm. de *a*,				„	„	107,5	„	200,0	„ 43,5
c)	„	„	„ 1	„	„ „ „	„	121,0	„	193,9	„	60,9
d)	„	„	„ 2	„	„ „ „	„	123,1	„	186,7	„	58,7
e)	„	„	„ 4	„	„ „ „	„	120,2	„	208,8	„	58,7

On avait pour l'accroissement

b—*a*,	en	moyenne,	+	106,9,	+	max.	188,3,	min.	+	43,5
c—*b*	„	„	+	13,5	+	„	55,8	„	—	13,3
d—*c*	„	„	+	2,1	+	„	8,8	„	—	10,9
e—*d*	„	„	—	2,9	+	„	33,3	„	—	36,3

En outre, on trouva l'accroissement

b—*a*,	dans les	27	cas,	positif,								
c—*b*	„	24	„	„	dans	2	cas	nul,	dans	1	cas	négatif
d—*c*	„	11	„	„	„	6	„	„	„	10	„	„
e—*d*	„	6	„	„	„	3	„	„	„	18	„	„

Eu égard aux sources possibles d'erreur et au nombre médiocrement grand des expériences, l'accord entre l'hypothèse et la réalité me paraît aussi satisfaisant qu'il était permis de l'espérer.

L'accroissement de force se montre bien dûment, dans les limites qu'on pouvait prévoir, dépendant de la longueur de la partie retranchée du nerf. A son maximum pour le premier demi-millimètre, il diminue graduellement pour les suivants, et devient (évidemment à cause du raccourcissement de la préparation) négatif entre 1 et 2 millimètres.

L'hypothèse en question étant donc, en ce point aussi, confirmée par l'expérience, je n'hésite pas à proclamer que *les sections transversales naturelles des fibres nerveuses*, situées au niveau des étranglements de Ranvier, *sont, à l'état d'intégrité et de repos, inactives sous le rapport électromoteur*. Cette conclusion me semble d'autant plus inévitable, que je ne vois pas moyen de donner une autre explication plausible des faits qui viennent d'être établis, ni surtout une explication qui embrasse aussi les phénomènes, évidemment tout à fait analogues, offerts par le cœur et les muscles lisses.

Expériences sur les muscles pléomères ordinaires.

Le cœur, les muscles lisses et les troncs nerveux se comporteraient donc au fond, sous le rapport électromoteur aussi bien que sous le rapport morphologique, comme des muscles pléomères ordinaires [1]). Chez ceux-ci pareillement, les éléments disposés à la suite les uns des autres (fibres, fuseaux musculaires) sont individuellement inactifs, et il doit par conséquent être facile d'y observer, ce qui dans les mêmes conditions ne réussit jamais chez les muscles monomères, le phénomène de l'abaissement rapide de la force manifeste des sections transversales artificielles et celui du relèvement de la force par le rafraîchissement de la section. Le muscle qui se prête le mieux à ces

[1]) Voir: du Bois-Reymond, *Ueber die negative Schwankung* etc. (*Arch. f. Anat. Phys.* etc., 1876, p. 318).

expériences est le muscle droit de l'abdomen de la grenouille, dont la structure pléomère régulière est généralement connue. Comme on pouvait s'y attendre, on est entièrement le maître de provoquer sur ce muscle soit le tableau des phénomènes que présentent les muscles monomères, abaissement lent de la force et inefficicacité du rafraîchissement de la section, soit le tableau opposé, soit encore un terme intermédiaire quelconque entre ces deux extrêmes. Tout dépend seulement de la position des sections par rapport aux inscriptions tendineuses.

Si la première section transversale artificielle est faite à une grande distance de l'inscription tendineuse la plus rapprochée, la force électromotrice, tout d'abord élevée, s'abaisse lentement, à peu près comme chez le muscle couturier. Le rafraîchissement de la section, opéré en deçà de l'inscription la plus proche, est alors sans influence ou, plus fréquemment, déprime la force. C'est ainsi que dans 4 expériences, où la première section se trouvait exactement au milieu de l'intervalle entre deux inscriptions tendineuses, la force était abaissée, en moyenne, au bout de 5 min. à 95,1, au bout de 10′ à 89,4, au bout de 20′ à 85,8, au bout de 30′ à 74,1 %. La section transversale ayant été rafraîchie, dans la 31e minute, par l'ablation d'une couche à peine épaisse de 1 mm., la mesure de la force donna 72,1 %. L'accroissement avait donc été de — 2 %.

Si la première section transversale est pratiquée à une petite distance, à environ 1—2 mm. de l'inscription tendineuse la plus voisine, la force, qui présente ordinairement dès le début une valeur moindre, s'abaisse beaucoup plus rapidement que dans le premier cas, aussi rapidement, par exemple, que chez le cœur; elle éprouve alors un accroissement immédiat et très considérable quand une nouvelle section est faite à travers les fibres qui naissent de l'autre côté de l'inscription. Dans 4 expériences, où la première section ne se trouvait qu'à 1—2 mm. de l'inscription la plus voisine, la force était descendue, en moyenne, au bout de 5 min. à 61,6, au bout de 10′ à 43,5 %. Au bout de 45 minutes, alors que la force était tombée à 3 %, le rafraîchissement

de la section, opéré à 1 mm. au-delà du tendon, la fit remonter subitement jusqu'à 98%, produisant ainsi un accroissement de + 95%.

Les muscles latéraux du thorax des poissons, qui ont une structure analogue, donnent lieu aux mêmes observations. Des pièces prismatiques, d'environ 2 cm. de longueur et 1 cm. d'épaisseur, furent prises sur les muscles thoraciques latéraux d'une anguille vivante et examinées, de 5 en 5 minutes, quant à leur force électromotrice. Dans 7 expériences, la force, d'une valeur initiale moyenne de 0,0276 D, s'abaissa,

en	5	min.,	à 93,9%	(max.	120,0,	min.	75,0).
„	10	„	„ 79,9 „	„	111,0	„	50,0
„	75	„	„ 48,4 „	„	63,3	„	18,8

Par le rafraîchissement de la section, la force fut relevée, comme moyenne des 7 expériences, de 48,4 à 73,3%. La nouvelle section avait entamé beaucoup de fibres restées jusqu'alors intactes, attendu qu'elle avait chaque fois enlevé, au moins en grande partie, une inscription tendineuse. Dans un cas, où l'inscription avait été emportée, lors du rafraîchissement, sur presque toute l'étendue de la section transversale (oblique), l'accroissement positif s'éleva à 87,4%; dans un autre, où la nouvelle section n'affecta que les fibres déjà atteintes par la première, l'accroissement fut négatif et mesura 20%.

Observations finales.

Je crois avoir démontré que, tout comme les fibres des muscles ordinaires de la vie animale, les cellules microscopiques de la chair du cœur, des muscles lisses et des fibres nerveuses, à l'état d'intégrité et de repos, n'exercent pas d'action électromotrice extérieure, ou n'exercent qu'une action à peine perceptible. Ce résultat me semble avoir, au point de vue de la théorie de

l'électricité des nerfs et des muscles, une importence assez grande pour mériter qu'on s'y arrête encore un instant.

Personne ne peut méconnaître que ce résultat est aussi contraire à l'hypothèse de la préexistence, qu'il paraît évident au point de vue de la théorie de Hermann. Si, pour les muscles ordinaires, il y avait *a priori* quelque motif d'admettre l'existence de conditions électromotrices particulières aux terminaisons naturelles des fibres, — je rappellerai seulement l'extinction de l'onde excitatrice à ces terminaisons, phénomène sur l'importance duquel M. du Bois-Reymond a récemment attiré de nouveau l'attention, — rien de pareil ne saurait être avancé au sujet des éléments des trois autres tissus en question. Ni sous le rapport anatomique, ni sous le rapport physiologique, ils ne présentent à leurs faces terminales quelque particularité qui puisse justifier une semblable opinion. Les particules nerveuses par lesquelles les cylindres-axes se touchent aux étranglements de Ranvier, les particules contractiles par lesquelles se touchent les cellules contiguës du cœur ou de la membrane musculeuse de l'estomac, ne montrent au microscope rien qui les distingue des particules situées à l'intérieur des cellules. De même que ces dernières, aussi, elles se communiquent normalement l'action excitatrice, et par conséquent elles ne jouent pas non plus sous le rapport de la propagation de l'excitation le rôle de faces limites ou terminales. Un état parélectronomique préexistant des surfaces cellulaires, tel que, d'après mes expériences, il faudrait l'admettre au point de vue de l'hypothèse moléculaire, ne pourrait donc pas être expliqué par une réaction terminale. Mais, si cela est impossible pour les éléments que nous venons de nommer, l'inactivité des fuseaux musculaires, qui leur ressemblent d'ailleurs sous tant de rapports, devra sans doute aussi trouver une autre explication.

Si l'on voulait objecter que mes observations n'ont porté, en réalité, que sur des surfaces cellulaires physiologiquement terminales, c'est-à-dire sur des surfaces devenues terminales pendant l'expérience, l'objection n'aurait pas de valeur, puisque les préparations, ainsi que je l'ai dit en parlant du cœur et ainsi

qu'il résulte des conditions expérimentales sus-mentionnées, n'étaient exposées à aucune excitation. En général, d'ailleurs, la supposition qu'une couche parélectronomique se serait développée sur ces préparations au cours de l'expérience seulement, doit être regardée *a priori* comme tout à fait arbitraire; car les conditions d'une section transversale artificielle sont évidemment plutôt favorables à la destruction d'une parélectronomie déjà existante ou en voie de production. Bien plus, il y a lieu de s'étonner que la section transversale artificielle puisse jamais devenir inactive tant qu'il reste une force latente notable.

Sous ce rapport, il est particulièrement intéressant que chaque section transversale artificielle d'un muscle monomère ordinaire se laisse également, comme je le montrerai bientôt, rendre inactive, tout en conservant une force latente considérable. Les conditions dans lesquelles cela a lieu sont encore de telle sorte, du reste, que le résultat observé pouvait bien être prévu d'après l'hypothèse de Hermann, mais non d'après l'hypothèse moléculaire.

SUR LA PERMÉABILITÉ

DES

MEMBRANES PRÉCIPITÉES,

PAR

HUGO DE VRIES.

Depuis les mémorables recherches de Nägeli sur les propriétés physiques du protoplasme vivant [1]), il est généralement connu que celui-ci ne peut être traversé par les matières colorantes dissoutes. Tant que le protoplasma vit, il refuse tout passage aux matières colorantes, aussi bien à celles qui se trouvent dissoutes dans le suc cellulaire qu'à celles qu'on met en contact avec lui par des voies artificielles. Après la mort seulement, il permet la diffusion des matières colorantes.

Plus qu'aucun autre, ce phénomène extrêmement remarquable a fixé l'attention des phyto-physiologistes sur les propriétés diffusives du protoplasme vivant. Toutes les recherches qui tendent à jeter quelque jour sur ces propriétés sont accueillies avec faveur, parce qu'on espère obtenir par ce moyen l'explication d'un des phénomènes les plus mystérieux de la vie.

A ce point de vue, les recherches de M. Traube sur les propriétés diffusives des membranes précipitées semblaient particulièrement dignes d'intérêt. Car bien que M. Traube, ne connais-

---

[1]) *Pflanzenphysiol. Untersuchungen von* Nägeli *und* Cramer, Heft I, 1855.

sant[1]) pas les travaux de M. Nägeli, compare les propriétés de ses membranes précipitées à celles des *parois des cellules* vivantes, il est évident pour tout physiologiste que les propriétés en question ne peuvent être retrouvées dans les parois cellulaires, mais tout au plus dans le *protoplasme*.

Le résultat des recherches de M. Traube[2]) est celui-ci: *les précipités qui*, naissant sous des conditions déterminées, par l'action réciproque de certaines substances dissoutes, *prennent la forme de membranes fermées*, *possèdent en beaucoup de cas la propriété d'être impénétrables à leurs composants membranogènes.* Si cette proposition était confirmée, elle ne fournirait pas, il est vrai, l'explication de l'imperméabilité du protoplasme aux matières colorantes, mais elle n'en exprimerait pas moins une analogie des plus remarquables avec ce phénomène. La propriété reconnue au protoplasme ne serait plus alors l'apanage exclusif de membranes vivantes ou organisées, mais appartiendrait aussi à des pellicules artificielles, non organisées.

Les nombreuses expériences sur lesquelles M. Traube a fondé son assertion parurent, au premier abord, en fournir une démonstration satisfaisante. Aussi trouva-t-elle généralement créance chez les botanistes et fut-elle, entre autres, exposée en détail dans le Traité de M. Sachs[3]).

Occupé moi-même de recherches sur les propriétés diffusives du protoplasme, je fus vivement intéressé par les expériences de M. Traube, lorsque j'en pris connaissance dans la troisième édition du Traité de M. Sachs, et je résolus de m'assurer, par des observations personnelles, de l'exactitude des résultats annoncés. A cet effet, je répétai — mais à d'assez longs intervalles,

---

[1]) Voir, à ce sujet: Sachs, *Zur Geschichte der mechanischen Theorie des Wachsthums der organischen Zellen*, dans *Sitzungsber. der phys. medicin. Gesellsch. in Würzburg*, Avril 1878 et dans la *Botan. Zeitung* 1878. No. 16.

[2]) Traube, *Experimente zur Theorie der Zellbildung und Endosmose* (Reichert *und* Dubois-Reymond's *Archiv*. 1867, p. 87). Une analyse de ce Mémoire se trouve dans la *Botan. Zeitung*, 1875. p. 56.

[3]) *Lehrbuch der Botanik*, 4e éd., p. 642.

par suite d'autres travaux — les principales des expériences en question, et je les variai autant que possible.

Mon attente fut toutefois déçue. A la vérité, mes expériences donnèrent en général les mêmes résultats empiriques que celles de M. Traube, mais une étude critique me montra que ces résultats ne légitimaient pas les conclusions que M. Traube en avait tirées. Au contraire, il me semble maintenant que la description même des expériences de M. Traube fournit des indications suffisantes du peu de fondement et même de la fausseté de son assertion. Du reste, j'ai trouvé des faits qui établissent cette fausseté d'une manière très claire et, à ce que je crois, irréfutable.

Ce n'était pas d'abord mon intention de publier les résultats que j'avais obtenus. Mais, tout récemment, l'attention des botanistes a de nouveau été fortement attirée sur les recherches de M. Traube et sur leur application à la physiologie des plantes [1]). Dans ces circonstances, la communication des expériences que j'avais entreprises uniquement pour m'orienter moi-même offrira peut-être quelque intérêt. Je les présente à titre de simples données, pouvant contribuer à faire apprécier à leur juste valeur, pour la physiologie végétale, les membranes dites précipitées; quant aux conséquences déduites de mes observations, je les soumets au jugement des physiciens.

Pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre, je crois devoir donner un court aperçu des expériences de M. Traube. Je prendrai à cet effet un exemple particulier, celui concernant le précipité dont M. Traube a fait le plus fréquent usage dans ses expériences de diffusion.

Tout le monde sait qu'une solution de ferrocyanure de potassium, mise en contact avec une solution d'un sel de cuivre, donne un précipité de ferrocyanure de cuivre. Ordinairement ce précipité est sous forme de flocons d'un brun-rougeâtre. Mais si,

[1]) Voir: *Bot. Zeitung*, 1878, n° 16, et *Sitzungsber. d. phys.-medicin. Gesellsch. in Würzburg*, Avril 1878.

au moyen d'une pipette, on laisse couler avec précaution une goutte du sel de cuivre [1]) dans la solution de ferrocyanure de potassium, il ne se produit plus de précipité brun-rougeatre: la goutte s'entoure alors d'une membrane transparente et incolore, qui, d'après M. Traube, consiste également en ferrocyanure de cuivre. Cette membrane empêche, au moins en apparence, la réaction ultérieure des deux sels, et la goutte reste pendant quelque temps sans éprouver de changement sensible au milieu de la solution jaune.

Une pareille goutte, revêtue d'une membrane précipitée, est ce que M. Traube appelle une cellule inorganique. Il vaut mieux l'appeler, avec M. Sachs [2]), une cellule artificielle, attendu que le ferrocyanure de cuivre est une combinaison organique. Les deux sels, dont la réaction donne naissance à la membrane, sont appelés par M. Traube les membranogènes.

Suivant le degré de concentration des deux solutions, ces cellules présentent des propriétés différentes. M. Traube en distingue, d'après cela, de deux sortes: 1° les cellules tendues, 3° les cellules flasques.

Les premières se forment lorsque la solution du sel de cuivre attire l'eau plus fortement que la solution du ferrocyanure de potassium. Dans ce cas, la goutte absorbe de l'eau du liquide environnant et par là augmente de volume. En même temps sa paroi se distend, et finit par se déchirer à l'endroit le plus mince. Dès qu'une déchirure s'est produite quelque part, les deux membranogènes se trouvent en contact l'un avec l'autre et la fente est fermée par une nouvelle membrane [3]). Par la répétition

---

[1]) J'emploie, avec un succès égal, le sulfate, l'acétate et le chlorure de cuivre.

[2]) *Lehrbuch der Botanik*, 4e éd., p. 642.

[3]) Le fait que les cellules artificielles s'accroissent au moyen de déchirures a été reconnu d'abord par M. Sachs (*Lehrbuch d. Botanik*, *l. c.*) sur les cellules de ferrocyanure de cuivre. Je l'ai observé, en outre, sur les cellules de ferrocyanure de fer, qui prennent naissance quand on introduit une goutte de perchlorure de fer dans du ferrocyanure de potassium, et sur les cellules qu'on obtient en introduisant une solution concentrée de chlorure de fer dans une solution étendue de silicate de potasse. Les arborisations bien connues, qui

des phénomènes de distension, de rupture et de formation de membranes précipitées dans les fentes, une pareille cellule peut s'accroître en peu de temps jusqu'à un volume 10 à 20 fois plus grand que le volume primitif. Finalement, toutefois, la solution intérieure devient si étendue, que la cause d'un accroissement ultérieur cesse d'exister.

Les „cellules flasques" prennent naissance quand les deux solutions attirent l'eau avec une force égale. Il n'y a alors aucune raison pour que la cellule s'accroisse; elle conserve le volume qu'elle avait à l'origine, et par conséquent la paroi n'est pas distendue, mais reste relâchée. Des déchirures, résultat d'un accroissement de volume, ne peuvent donc pas se produire en ce cas.

Pour les expériences de diffusion, il est clair que les cellules susceptibles de s'accroître ne conviennent pas du tout, à cause des fentes qui s'y forment continuellement. Aussi, pour cet usage, M. Traube a-t-il employé exclusivement les cellules à parois lâches.

Outre le ferrocyanure de potassium et les sels de cuivre, M. Traube nous a encore appris à connaître une foule d'autres substances qui peuvent donner lieu, deux à deux, à la production de cellules artificielles revêtues d'une membrane précipitée.

Parmi toutes ces différentes sortes de cellules, il y en a, suivant M. Traube, quelques-unes dont la paroi est perméable pour l'un des deux membranogènes, tandis que chez la grande majorité d'entre elles cela n'est pas le cas. A la première espèce appartiennent les cellules qui prennent naissance par l'action de l'ammoniaque sur le chlorure de fer ou de l'acide nitrique sur l'albumine [1]). Ici, l'ammoniaque traverse la membrane et change le chlorure de fer en une masse d'hydrate d'oxyde de fer, et de même l'acide nitrique pénètre jusqu'à l'albumine qu'elle coagule en une épaisse gelée de nitrate d'albumine.

Dans la plupart des cas, toutefois, la réaction des membra-

---

se forment dans le silicate de potasse lorsqu'on y jette de petits fragments d'un sel de fer, de cuivre, de plomb, ou d'un autre métal lourd, paraissent aussi s'accroître toujours au moyen de fentes.

[1]) *Bot. Zeitung*, 1875, p. 60.

nogènes reste limitée à la couche de séparation. A cette seconde espèce appartiennent les cellules de ferrocyanure de cuivre et une foule d'autres. En ce qui concerne celles-ci, M. Traube prétend que leur paroi est imperméable pour les deux membranogènes, attendu que les interstices entre les molécules de la paroi sont si étroits que les molécules des composants ne peuvent pas y passer [1]). Suivant lui, c'est dans ce cas seulement que la précipitation reste bornée à la limite de contact des deux liquides, c'est alors seulement qu'il se forme une couche mince de substance solide [2]).

Après cet aperçu succinct des observations et des idées de M. Traube, j'examinerai, en premier lieu, la question de savoir dans quelles circonstances la production d'une membrane entre les deux liquides prouve l'imperméabilité de celle-ci pour ses deux membranogènes.

Au moment où l'on introduit une goutte de la solution étendue du sel de cuivre dans le ferrocyanure de potassium, la goutte se revêt d'une membrane hyaline. Elle se présente alors sous la forme d'une vésicule à contenu bleu, au sein du liquide jaune. Supposons d'abord que la membrane soit imperméable pour les deux sels. Aucune particule de ferrocyanure de potassium ne pourra alors entrer en contact avec le sel de cuivre, aucune nouvelle précipitation de ferrocyanure de cuivre ne pourra se faire. L'état, tel qu'il était au commencement, restera stationnaire; après plusieurs heures, et même plusieurs jours, on devra retrouver, dans le liquide jaune, une goutte bleue entourée d'une paroi hyaline. Réciproquement, l'observation de ce fait plaiderait en faveur de

[1]) *Bot. Zeitung*, 1875, p. 59, 60.

[2]) Les vues de M. Traube sur la grandeur relative des molécules des membranogènes et des interstices moléculaires de la membrane précipitée ne me paraissent pas reposer sur des fondements physiques assez solides. Il est du reste inutile de les soumettre ici à une appréciation critique, attendu que la prémisse empirique, qui en forme le point de départ, est inexacte, comme on le verra plus loin.

l'imperméabilité de la membrane pour les deux membranogènes.

Voyons maintenant quelles seraient les conséquences de l'hypothèse contraire. Supposons que la membrane soit perméable à l'un des deux membranogènes, ou à tous les deux. Trois cas peuvent alors être distingués: 1° la membrane n'est perméable que pour le sel de cuivre, 2° elle n'est perméable que pour le ferrocyanure de potassium, 3° elle laisse passer chacun des deux sels.

Si la membrane est perméable pour le sel de cuivre, aussitôt formée elle livrera passage à des molécules de ce sel. Celles-ci, arrivées à la surface extérieure de la paroi, s'y trouveront en contact avec du ferrocyanure de potassium: il se précipitera donc du ferrocyanure de cuivre, qui se déposera sur la paroi, au côté externe. Cela continuera ainsi, jusqu'à ce qu'une couche entière se soit déposée sur la paroi primitive. Mais cette nouvelle couche se laissera également traverser par le sel de cuivre, et une troisième couche de ferrocyanure de cuivre devra se former. Ou plutôt: dès le moment où elle a pris naissance, la paroi augmentera constamment d'épaisseur, par le dépôt de nouvelles particules de ferrocyanure de cuivre à sa face externe. Cet effet devra se continuer jusqu'à ce que, ou bien le sel de cuivre, ou bien le ferrocyanure de potassium soit entièrement épuisé: alors seulement disparaît la cause de la production du ferrocyanure de cuivre.

Les deux autres cas sont maintenant faciles à apprécier. Si la membrane n'est perméable que pour le ferrocyanure de potassium, elle devra s'épaissir au côté interne. Si elle est perméable pour chacun des deux sels, l'épaississement pourra avoir lieu des deux côtés, à moins que l'un des sels ne la traverse plus rapidement que l'autre, auquel cas l'épaississement sera de nouveau unilatéral.

Dans les trois cas qui sont possibles dans notre seconde hypothèse, la paroi de la cellule, dès sa première constitution, devra constamment s'accroître en épaisseur, et cet épaississement ne pourra s'arrêter que lorsqu'un des membranogènes sera entièrement consommé.

De ce raisonnement un peu prolixe résulte ceci:

1° si la conclusion de M. Traube est juste, et que la membrane

précipitée soit imperméable pour les deux membranogènes, cette membrane conservera indéfiniment son épaisseur primitive.

2° si la membrane précipitée est perméable pour l'un des membranogènes ou pour tous les deux, son épaisseur devra augmenter continuellement, jusqu'à ce que l'un des membranogènes soit complétement épuisé.

Réciproquement, l'observation prolongée de la membrane fournira donc le moyen de contrôler la valeur de l'assertion de M. Traube. Si la membrane reste des jours entiers sans éprouver de changement, ce fait plaidera en faveur de l'assertion; si elle s'épaissit au cours de l'expérience, la thèse de M. Traube sera réfutée.

La rapidité de l'épaississement dépendra naturellement de toutes sortes de circonstances accessoires. Il en est de même quant à la question de savoir si au bout de quelques jours on pourra voir la fin de l'action, en d'autres termes, constater empiriquement la disparition complète d'un des membranogènes. S'ils sont l'un et l'autre en grande quantité, ou si le mouvement à travers la membrane est très peu actif, il se passera peut-être des semaines avant que l'expérience soit entièrement terminée. Chacun sait, du reste, que les phénomènes de diffusion sont de leur nature très lents à s'accomplir. Il convient donc de choisir les circonstances de telle sorte que l'expérience ne dure pas trop longtemps.

L'examen critique auquel nous venons de nous livrer indique suffisamment de quelle manière il faut s'y prendre pour obtenir la réponse à la question que nous nous sommes posée. Je puis donc passer maintenant à la description de mes expériences. Je n'en exposerai qu'une seule en détail et me bornerai à communiquer succinctement le résultat des autres.

Pour obtenir une cellule flasque de ferrocyanure de cuivre, j'employai un liquide qui, sur 80 parties en poids d'eau distillée, contenait 20 parties de ferrocyanure potassique jaune du commerce. Comme sel de cuivre, je me servis du chlorure cuivrique. Afin d'obtenir celui-ci au degré de concentration

convenable, j'en fis une solution assez concentrée, que j'étendis successivement d'eau distillée, jusqu'à ce qu'une goutte du mélange, introduite dans la solution de ferrocyanure potassique, formât une vésicule dont les parois restaient tout à fait lâches pendant plusieurs heures. Dans cet état de concentration, ma solution de chlorure cuivrique renfermait environ 3—5 pour cent du sel (hydraté) du commerce. Une pareille solution est un peu plus lourde que la solution de ferrocyanure potassique et se maintient donc au fond de celle-ci.

Un petit verre cylindrique, de 10 cm. de hauteur et d'environ 100 c. c. de capacité, étant rempli de la solution de ferrocyanure potassique, j'y laissai couler avec précaution une goutte du chlorure cuivrique étendu. Pour cela, une pipette, munie d'un robinet au-dessous de l'ampoule et étirée en une pointe capillaire, convient très bien. Je remplissais la pipette de la solution cuivrique, je fermais le robinet, j'essuyais avec soin la pipette en dehors, et je la plongeais dans la solution de ferrocyanure jusqu'à ce que la pointe atteignît le fond du verre. En ouvrant alors le robinet, on peut laisser sortir autant de sel de cuivre qu'on le veut. On ferme le robinet sans déplacer la pipette, puis on retire celles-ci d'un mouvement brusque. De cette manière, la membrane précipitée est nettement détachée de la pointe de la pipette à laquelle elle adhérait, et on obtient une cellule bien conformée, qui repose tranquillement sur le fond du vase.

Voyons maintenant si cette cellule éprouve ou non des changements dans le cours d'un ou de plusieurs jours.

Au moment où la goutte bleue apparut à la pointe de la pipette, elle se revêtit d'une pellicule extrêmement mince, délicate, incolore, transparente et limpide comme du verre. La goutte bleue, au sein du liquide jaune, paraissait de couleur verte. Dans cet état de la cellule, la membrane est extrêmement flexible, comme il est facile de s'en assurer par différentes expériences.

La cellule ne grossit pas et ne sembla d'abord éprouver aucun changement. Au bout de $\frac{1}{2}$ — 1 heure, toutefois, je remarquai sur la paroi hyaline quelques taches d'un aspect brun clair et floconneux. Ces taches augmentèrent peu à peu en nombre et

en étendue, et enfin la paroi entière prit une teinte brun clair, tout en restant provisoirement transparente. Mais, dans l'espace de quelques heures, la teinte brune se fonça de plus en plus, et la paroi perdit successivement sa transparence. Pendant ce temps, la cellule ne grandit pas du tout, et même après 24 heures elle avait encore son volume primitif. A ce moment la paroi était brun foncé, épaisse et complétement opaque. Elle avait aussi perdu sa flexibilité et était devenue raide et fragile: au moindre contact elle se brisait. A l'aide d'une aiguille, je la cassai avec précaution en un point: il ne se forma pas de nouveau précipité. Cela prouvait que la cellule ne renfermait plus de sel de cuivre dissous; d'ailleurs, je pouvais voir distinctement que son contenu était coloré en jaune, qu'elle était par conséquent remplie de ferrocyanure de potassium.

Le résultat de l'expérience est donc:

Que la paroi de la cellule de ferrocyanure de cuivre, dès l'origine et d'une manière continue, a augmenté en épaisseur, jusqu'à ce qu'enfin tout le sel de cuivre eût été consommé.

De là découle la réponse à la question que nous nous sommes posée:

La paroi de la cellule de ferrocyanure de cuivre était perméable pour l'un des membranogènes ou pour tous les deux. Quant à ce dernier point, à savoir si la membrane était perméable pour un seul des deux sels ou pour les deux, je n'ai rien pu décider; cette question n'a du reste, pour l'objet que j'avais en vue, qu'une importance très secondaire, et la solution peut en être laissée, sans inconvénient, à des recherches ultérieures. En tout cas, *il est certain que l'assertion de M. Traube, concernant l'imperméabilité de la paroi pour chacun des deux sels, est inconciliable avec le fait que je viens de décrire.*

L'expérience en question a été répétée plusieurs fois, avec diverses modifications, et toujours j'ai obtenu le même résultat. C'est ainsi, par exemple, que j'ai fait se déposer la couche de ferrocyanure de cuivre à la surface d'un papier-parchemin tendu sur l'extrémité d'un tube de verre, ce qui m'a fourni une membrane qui pouvait être conservée pendant plusieurs semaines.

Comme la concentration des deux liquides avait été réglée conformément aux données communiquées ci-dessus, il ne se produisit pas d'éruptions dans cette membrane, ainsi que cela est ordinairement le cas. Au début de l'expérience, le sel de cuivre occupait le tube, dont l'extrémité recouverte de papier-parchemin était plongée dans la solution de ferrocyanure de potassium. La membrane précipitée sur le papier-parchemin devint de plus en plus épaisse, et au bout d'environ trois semaines je trouvai que tout le sel de cuivre avait disparu du tube, où il était remplacé par du ferrocyanure potassique.

A en juger d'après mes expériences, l'accroissement continu en épaisseur est une propriété générale des membranes précipitées. J'ai vu ce phénomène se produire aussi bien chez les cellules flasques de ferrocyanure de cuivre, que chez celles qui croissent. Je l'ai constaté également chez les deux genres de cellules du ferrocyanure de fer, obtenues par l'introduction d'une goutte de chlorure ferrique (concentré ou étendu) dans la solution de ferrocyanure de potassium; ici encore la paroi devient peu à peu épaisse, fragile et de couleur foncée. La même chose s'observe chez les cellules siliceuses, parmi lesquelles j'ai étudié celles à base de fer, de cuivre, de plomb et d'étain. On obtient ces cellules en jetant de petits fragments de sels des métaux susdits dans une solution étendue de silicate de potasse. Elles se développent sur ces fragments sous la forme d'arbuscules richement ramifiés. Il se passe ordinairement plusieurs heures avant qu'elles aient atteint une hauteur un peu notable; mais si la solution de silicate (une partie du verre soluble du commerce sur deux parties d'eau distillée) est préalablement chauffée à 45° C., on peut les voir croître et elles acquièrent en moins d'une demi-heure une hauteur de 8 centim. et plus. Chez les cellules de silicate de fer, la paroi éprouve des changements de couleur très remarquables; d'abord blanche, puis grise, elle devient ensuite verte et prend alors une teinte de plus en plus foncée, jusqu'à ce qu'elle soit à peu près noire. Les autres cellules siliceuses précitées offrent aussi, quoique à un moindre degré, des changements continuels dans leurs parois.

Chez toutes les autres cellules artificielles dont j'ai fait un examen sommaire, j'ai constamment observé l'épaississement progressif de la paroi.

Lorsque, armé de la connaissance de ces résultats, on étudie attentivement les descriptions que M. Traube a données de ses expériences, on reconnaît qu'il y est fait mention, en plusieurs endroits, d'un épaississement de la paroi. Seulement, M. Traube a négligé de rechercher la cause de ce phénomène.

M. Traube a encore exécuté avec ses cellules flasques une foule d'autres expériences de diffusion, desquelles il déduit que, dans beaucoup de cas, les parois de ces cellules sont non-seulement imperméables pour les membranogènes, mais aussi pour nombre d'autres sels dissous. Toutes ces expériences ont été faites par la même méthode que celles dont nous avons rendu compte plus haut. Elles pèchent toutes en ceci, qu'elles ont duré beaucoup trop peu de temps et ont été effectuées à une trop petite échelle pour pouvoir trancher la question de savoir si les membranes précipitées étaient absolument imperméables aux sels étudiés, ou si elles ne s'en laissaient traverser que lentement. Elles ne justifient donc pas, à mon avis, la conclusion qu'en a tirée M. Traube. Du reste, à raison des faits rapportés ci-dessus, leur valeur pour la physiologie des plantes est si faible, qu'il est inutile de les soumettre ici à une critique détaillée.

Des raisonnements et des expériences qui précèdent, je crois pouvoir déduire, contrairement à l'assertion de M. Traube:

1°. que les membranes précipitées dont j'ai fait l'étude sont perméables pour leurs membranogènes (au moins pour l'un d'eux);

2°. que ces membranes augmentent d'épaisseur aussi longtemps qu'elles sont en contact avec les deux membranogènes;

3°. que pendant cet épaississement leurs propriétés physiques changent continuellement.

Il est clair que, par ces résultats, la prétendue analogie entre les membranes précipitées et le protoplasme vivant est réduite à une simple apparence, dépourvue de toute signification.

RECHERCHES

SUR LA QUINAMINE,

PAR

A. C. OUDEMANS Jr.

En 1876, M. O. Hesse a découvert dans l'écorce d'un *Cinchona Succirubra* cultivé à Darjeeling, dans l'Inde anglaise, un nouvel alcaloïde, auquel il a donné le nom de quinamine. Les premiers renseignements à ce sujet se trouvent dans le tome 5e des *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, p. 265—266.

Plus tard (*Ann. der Chem. u. Pharm.*, t. CLXVI, p. 226 et suiv.), le même chimiste a publié sur la quinamine un travail plus étendu, et tout récemment (*Ber. d. d. chem. Gesellschaft*, t. X, p. 2157 et suiv.), en faisant différentes communications concernant les alcaloïdes du quinquina aujourd'hui connus, il s'est de nouveau occupé de la quinamine, en même temps qu'il annonçait la découverte d'une base isomère avec elle, la conquinamine.

Il était à prévoir que le nouvel alcaloïde ne serait pas exclusivement propre à l'écorce du *Cinchona Succirubra* cultivé à Darjeeling; effectivement, il a été trouvé par M. de Vry (*Pharm. J. Trans.* [3] 4, p. 609) dans une écorce de *Succirubra* de Rungbee, par M. Howard (*Pharm. J. Trans.* [3] 5, p. 1) dans l'écorce d'une espèce hybride provenant du *C. Succirubra* et du

C. Calisaya, et en dernier lieu par M. Hesse (*Ber. der d. chem. Gesellsch.*, X, p. 2157—2158), non-seulement dans toutes les écorces de *Succirubra* de Java et de l'Inde anglaise qu'il a examinées, mais aussi dans beaucoup d'écorces de l'Amérique du sud, fournies par différentes espèces de *Cinchona*. Il paraît donc démontré que la quinamine, bien que s'y rencontrant en petite quantité, doit être regardée comme un élément assez constant des vrais quinquinas.

M'étant longtemps occupé de la recherche du pouvoir rotatoire spécifique des principaux alcaloïdes du quinquina, à l'état libre et à l'état de combinaison, je souhaitais vivement de pouvoir étudier aussi sous ce rapport la base nouvellement découverte et ajouter quelque chose aux connaissances déjà acquises concernant ce corps remarquable. Ce désir a été satisfait plus tôt que je ne l'avais espéré, grâce à la libéralité de notre savant quinologue le Dr. J. E. de Vry, qui m'a remis environ 600 grammes de *quinétum*, préparé à Darjeeling.

Comme on le sait, le nom de *quinétum* sert à désigner le mélange brut d'alcaloïdes qu'on retire de l'écorce de *Cinchona Succirubra*; c'est surtout en Angleterre que le mélange en question est connu sous ce nom. On l'obtient à Darjeeling en traitant l'écorce à froid par l'acide chlorhydrique étendu, ajoutant à l'extrait un faible excès de soude, lavant le précipité et le séchant.

Il se présente sous la forme d'une poudre très ténue, impalpable, d'un jaune clair. Il est relativement riche en cinchonine, cinchonidine et alcaloïdes amorphes, mais pauvre en quinine; la proportion de celle-ci y est à peine supérieure, comme on le verra, à celle de la quinamine.

Analyse du quinétum.

Avant de séparer la quinamine des matières qui forment la masse principale du quinétum, j'ai cru devoir soumettre celui-ci à une analyse quantitative. Voici comment j'ai procédé.

Après qu'un examen qualitatif eut confirmé ce que m'avait appris M. de Vry, à savoir que le quinétum ne renfermait pas une quantité appréciable de quinidine (conquinine de Hesse), un poids déterminé du produit (5—10 grammes) fut dissous à l'aide d'une douce chaleur dans l'acide chlorhydrique étendu, pris en quantité telle que le liquide n'eût qu'une faible réaction acide. La solution filtrée fut précipitée par un léger excès de tartrate sodico-potassique et abandonnée à elle-même pendant 24 heures. Le précipité des tartrates de quinine et de cinchonidine fut alors recueilli sur un filtre, et lavé d'abord avec une solution modérément concentrée de tartrate sodico-potassique, puis avec de l'eau. Le mélange des tartrates ayant été séché à l'air, j'y dosai la quinine et la cinchonidine par la méthode que j'ai décrite antérieurement (*Arch. néerl.* T XII. p 55—64).

Le liquide séparé des deux tartrates insolubles fut précipité par un faible excès de soude, puis filtré; le précipité, lavé à l'eau, fut séché à 100° C. Le liquide provenant de la filtration, joint aux eaux de lavage, fut évaporé pour séparer les traces d'alcaloïdes qui pouvaient encore se trouver en solution; le précipité ainsi obtenu était toutefois en quantité si faible, que je crus pouvoir le négliger sans aucun inconvénient.

La poudre séchée, qui devait consister essentiellement en cinchonine, quinamine et alcaloïdes amorphes, fut pesée et ensuite épuisée complétement par l'éther absolu. Les solutions éthérées ayant été évaporées doucement jusqu'à siccité et le résidu traité de nouveau par l'éther absolu, il resta une petite quantité de cinchonine, qui fut ajoutée à la masse qu'avait laissée le premier traitement par l'éther. La somme des alcaloïdes soumis à l'action de l'éther, diminuée de la quantité totale de cinchonine obtenue, faisait connaître la proportion d'alcaloïdes amorphes et de quinamine, pris ensemble.

Pour doser maintenant la quinamine, au moins approximativement, je tirai parti de la propriété que possède cet alcaloïde de se dissoudre très bien dans l'alcool à 50 p. c. à la chaleur de l'ébullition, mais très peu à la température ordinaire. Le produit de l'évaporation de l'extrait éthéré fut donc traité, à la chaleur de l'ébullition, par le liquide susdit. La masse entière fut dissoute, mais par le refroidissement la quinamine se sépara en majeure partie, tandis que les alcaloïdes amorphes restaient en solution. La quinamine précipitée fut alors recueillie sur un filtre de Bunsen, lavée avec un peu d'alcool étendu, séchée et pesée.

Après la séparation de la quinamine, la solution alcoolique faible fut évaporée; le résidu, séché à 100° C, avait l'aspect d'une masse résineuse transparente; il fut porté en compte comme mélange d'alcaloïdes amorphes.

Cette méthode de séparation de la quinamine, quelque défectueuse qu'elle soit, me paraît préférable, même pour préparer la quinamine en assez grande quantité, à celle qui a été indiquée par M. Hesse dans son premier Mémoire (*Ann. der Chem. u. Ph.*, 166) et qui reposerait, d'après lui, sur la circonstance que le chloroplatinate de quinamine est passablement soluble dans l'eau, tandis que ce liquide attaquerait à peine les chloroplatinates des alcaloïdes amorphes.

Je me suis assuré que le chloroplatinate de quinamine est *très peu* soluble dans l'eau, de sorte que, une fois formé, il peut être lavé à l'eau, sans que la quantité en diminue d'une manière appréciable. Il n'en est pas moins vrai que lorsqu'on ajoute, à une solution de chlorhydrate de quinamine contenant de l'acide chlorhydrique libre, une solution du *soi-disant* chloride de platine, on n'obtient un précipité que si la liqueur est très concentrée.

J'ai constaté aussi qu'en mêlant une solution de chlorhydrate de quinamine tout à fait neutre avec un excès du réactif connu sous le nom de chloride de platine, on ne précipite jamais toute la quinamine, mais qu'on retrouve une portion notable de celle-ci dans le liquide séparé du précipité.

L'explication me paraît pouvoir être cherchée dans le fait, mis en évidence par les recherches de MM. Weber et Topsö ainsi que par les expériences récentes et décisives de M. Jörgensen (*J. f. pr. Chem. Neue Reihe*, XVI, p. 345 et suiv.), que le réactif, obtenu en dissolvant le platine dans l'eau régale et en chassant autant que possible l'acide chlorhydrique, ne consiste pas en *chloride platinique* hydraté, mais en *acide platino-chlorhydrique* hydraté ($Pt\ Cl_6\ H_2 + 6\ H_2\ O$).

Lorsqu'on ajoute une solution de ce composé à une solution de chlorhydrate neutre de quinamine, de l'acide chlorhydrique est mis en liberté, et celui-ci exerce, soit seul, soit conjointement avec l'excès du réactif ajouté, une influence dissolvante sur le chloroplatinate de quinamine. Une fois lavé à l'eau, ce dernier ne montre plus qu'une solubilité extrêmement faible dans ce liquide.

Pour compléter l'analyse quantitative du quinétum, j'ai déterminé encore la petite quantité d'eau que contenait la poudre en apparence complétement sèche, ainsi que le carbonate de sodium qui y était resté par suite du mode de préparation et de l'imperfection du lavage.

Comme moyenne de trois analyses passablement concordantes, j'ai obtenu ainsi les résultats suivants: [1])

Cinchonine	37,0	pour	cent.
Quinine	6,1	„	„
Cinchonidine	22,9	„	„
Quinamine	4,5	„	„
Alcaloïdes amorphes	21,1	„	„
Carbonate de sodium	2,9	„	„
Eau	2,7	„	„

[1]) Tout récemment j'ai constaté la présence de 0,5 % de quinidine et de 0,3 % de conquinamine dans le quinétum de Darjeeling. Ces résultats furent obtenus sur 9 kilogr. de matière brute par une méthode que j'espère publier plus tard. La quantité de quinamine que j'ai pu isoler des 9 kilogr. de matière brute n'atteignit pas le chiffre de 3 %.

Sept. 1878.

Préparation de la quinamine au moyen du quinétum de Darjeeling.

Pour retirer la quinamine de la masse principale du quinétum mis à ma disposition, ce produit fut dissous dans aussi peu que possible d'acide chlorhydrique étendu, puis on ajouta à la solution du tartrate sodico-potassique en quantité plus que suffisante pour transformer en tartrates la quinine et la cinchonidine. Après quelques jours de repos, on sépara par le filtre le dépôt qui s'était formé dans le liquide, et on précipita celui-ci par un léger excès de soude caustique.

Le précipité lavé fut alors bouilli à différentes reprises avec de l'alcool à 60 pour cent; après que les liquides alcooliques s'étaient un peu éclaircis par le repos, ils étaient décantés avec précaution et filtrés. Ils contenaient essentiellement des alcaloïdes amorphes et de la quinamine, et en outre une faible quantité de cinchonine. Pendant le refroidissement, ces deux derniers alcaloïdes se déposaient peu à peu en flocons, qui étaient séparés de l'eau-mère par l'appareil à filtrer de Bunsen, puis lavés avec de l'alcool étendu et séchés. Le traitement par l'alcool à 60 pour cent, qui vient d'être décrit, fut répété sur le résidu jusqu'à ce que le liquide filtré, abandonné à lui-même pendant vingt-quatre heures, ne laissât plus déposer une quantité appréciable de quinamine.

Pour purifier la quinamine impure, de couleur jaunâtre, on l'épuisa d'abord par l'éther absolu. Il resta une quantité assez notable de cinchonine. Le résidu obtenu par l'évaporation du liquide éthéré fut dissous à la chaleur de l'ébullition dans l'alcool à 80 pour cent. Par le refroidissement il se déposa des aiguilles blanches de quinamine presque pure, qui ressemblaient au sulfate ordinaire de quinine. Ces aiguilles, recueillies de nouveau sur le filtre de Bunsen et lavées avec de l'alcool étendu, furent transformées en un sel neutre bien cristallisable, et l'alcaloïde

fut enfin précipité de la solution de ce sel par la soude, et soumis à une nouvelle cristallisation dans l'alcool. Dans son Mémoire sur la quinamine (*Ann. der Chem. u. Pharm.*, 166), M. Hesse mentionne seulement, comme sel facilement cristallisable, l'iodhydrate; mais on verra plus loin que le nitrate, le chlorate et le perchlorate peuvent très bien aussi s'obtenir en cristaux. La première de ces trois combinaisons, qui est relativement la plus soluble, est celle qui se prête le mieux à la préparation d'un sel de quinamine pur.

Par ce procédé, d'une application assez longue et pénible, je n'ai pu retirer de toute ma provision de quinétum que 20 grammes de quinamine pure. Les solutions alcooliques faibles contenaient encore une certaine quantité de cet alcaloïde, dont la séparation offrait beaucoup de difficulté et ne put même être réalisée totalement.

Composition et propriétés de la quinamine.

M. Hesse, dans son Mémoire sur la quinamine (*Ann. der Chem. u. Pharm.* 166), a attribué à ce corps la formule $C_{20}H_{26}N_2O_2$, en se fondant sur les résultats donnés par l'analyse élémentaire de l'alcaloïde libre et par le dosage de l'iode dans l'iodhydrate. A la fin de l'année dernière toutefois (*Ber. der deutschen chemischen Gesellschaft* t. X), il a adopté la formule $C_{19}H_{24}N_2O_2$, parce que, lors de la transformation de la quinamine en apoquinamine (nouvelle base qui, d'après lui, répond à la formule $C_{19}H_{22}N_2O$), sous l'influence de l'acide bromhydrique, il ne se forme pas de bromure de méthyle; ce qui devrait pourtant avoir lieu, et même jusqu'à concurrence de 25 pour cent du poids de la matière primitive, si la formule d'abord adoptée exprimait la composition véritable de la quinamine. ($C_{20}H_{26}N_2O_2H+BrH$ donneraient alors, en effet: $C_{19}H_{22}N_2O + H_2O + CH_3Br$).

Comme M. Hesse n'a pas encore publié d'analyses des combinaisons réalisées par lui, et qu'il s'est borné à un exposé succinct des résultats obtenus, il est impossible, quant à présent, d'apprécier la valeur scientifique des raisons qu'il a produites à l'appui de son opinion.

Les analyses de la quinamine, exécutées par moi, ont donné les résultats suivants:

1) 0,2246 gr. de quinamine ont donné par combustion 0,6045 gr. CO_2 et 0,1702 gr. H_2O.
2) 0,2088 de quinamine ont donné 0,5613 gr. CO_2 et 0,1297 gr. H_2O.
3) 0,2382 „ „ „ „ 0,6413 „ „ „ 0,1746 „ „
4) 0,2206 „ „ „ „ 0,5913 „ „ „ 0,1607 „ „
5) 0,2356 „ „ „ „ 0,6348 „ „ „ 0,1758 „ „
6) 0,2124 „ „ „ „ 0,5708 „ „ „ 0,1628 „ „
7) 0,2166 „ „ „ „ 0,5840 „ „ „ 0,1518 „ „

Dans les analyses 1—4, il y avait à l'avant du tube une couche d'argent, dans les analyses 5 et 6, un rouleau de gaze de cuivre; dès le début de l'opération, on avait fait passer dans le tube un courant lent d'oxygène, autant qu'il en fallait pour brûler la matière, sans attaquer le cuivre. La dernière analyse fut exécutée avec de la gaze de cuivre dans la partie antérieure du tube, mais avant et pendant la combustion on fit traverser celui-ci par de l'azote pur, gaz dans lequel on avait aussi fait rougir préalablement la gaze de cuivre; lorsqu'il ne resta plus que du charbon dans la nacelle de platine, la combustion fut achevée sous l'influence d'un courant d'oxygène.

Des résultats de ces analyses on déduit par le calcul les proportions centésimales suivantes pour C et H. (Le dosage de l'azote a été négligé, parce qu'il m'a paru superflu après les expériences de M. Hesse).

	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	$C_{20}H_{26}N_2O_2$	$C_{19}H_{24}N_2O_2$.
C.	73,6	73,2	73,4	73,1	73,5	73,3	73,5	73,6	73,1
H.	8,4	7,4	8,1	8,3	8,5	7,8	7,7	8,0	7,7

Ces nombres s'accordent mieux avec la première qu'avec la seconde des deux formules données par M. Hesse.

Pour les contrôler par la grandeur du poids moléculaire, j'ai exécuté différents dosages de l'iode contenu dans l'iodhydrate de quinamine pur et bien cristallisé.

Voici les résultats de quelques analyses faites à l'aide de la balance:

1)	0,7804	gr.	d'iodhydrate	ont	donné	0,4162	gr.	AgI.
2)	0,7043	„	„	„	„	0,3763	„	„
3)	1,0473	„	„	„	„	0,5553	„	„
4)	1,0285	„	„	„	„	0,5439	„	„

On en déduit pour la proportion d'iode:

		$C_{19}H_{24}N_2O_2$	$C_{20}H_{26}N_2O_2$.
1) 28,8; 2) 28,9; 3) 28,6); 4) 28,8		28,8	28,0

Le dosage de l'iode par la méthode de titrage de M. Volhard, appliquée avec tous les soins recommandés par l'auteur, a présenté quelques difficultés, parce que, même avec un excès d'argent et une assez grande quantité d'acide nitrique, le liquide s'éclaircissait mal. Il paraît aussi que l'iodure d'argent retient opiniâtrement de la matière organique; du moins, en le chauffant, j'ai remarqué souvent l'odeur des produits de la distillation des alcaloïdes du quinquina. Au reste, voici les résultats:

1,2610 gr. d'iodhydrate de quinamine ayant été dissous dans 300 c.c. d'eau, on y ajouta 300 milligr. Ag dissous dans l'acide nitrique, quantité qui devait être exactement suffisante si le sel répondait à la composition $C_{20}H_{26}N_2O_2IH$. Le liquide, longtemps secoué, resta laiteux. Après qu'on eut ajouté encore 15 milligr. Ag, le liquide s'éclaircit par l'agitation et l'argent se trouva en excès. Par le titrage en retour avec le rhodanure d'ammonium, je reconnus qu'il avait fallu tout juste 0,3077 gr. d'argent pour précipiter l'iode, ce qui correspond de nouveau à 28,8 I pour cent de matière.

Je serais tenté d'attribuer aux résultats des dosages de l'iode, qui s'accordent avec la formule $C_{19}H_{24}N_2O_2$ pour la quinamine,

plus de valeur qu'aux résultats de l'analyse élémentaire, si je n'étais retenu par la considération que, presque *toutes* mes analyses m'ont donné une proportion de carbone supérieure à la quantité calculée; circonstance qui ne s'était pas présentée pour d'autres matières organiques, que j'avais analysées antérieurement avec le même appareil. Je préfère donc laisser la question en suspens, et je pense qu'elle ne pourra être tranchée que par des analyses comparatives d'autres sels de quinamine.

Pour ce qui concerne les propriétés de la quinamine, celles-ci ont déjà été décrites en majeure partie par M. Hesse. Je me contenterai donc de signaler les faits qu'il n'a pas remarqués et les points par rapport auxquels mes observations s'écartent des siennes.

D'après M. Hesse, la quinamine est très soluble dans l'éther. A cet égard, mes expériences ont donné un résultat un peu différent.

En effet, 10,308 grammes d'éther *pur* n'ont dissous, à 16° C, que 0,2128 gr. de quinamine, c'est-à-dire 2,06 parties sur 100 d'éther. Peut-être le désaccord entre les observations de M. Hesse et les miennes tient-il à ce que M. Hesse n'a pas employé de l'éther pur.

Le pouvoir rotatoire spécifique de la quinamine n'a été déterminé par M. Hesse que pour des solutions dans l'alcool concentré. Je l'ai mesuré pour les solutions de l'alcaloïde dans l'alcool absolu, l'alcool à 90 pour cent en poids, le benzol pur et le chloroforme pur. Les résultats de ces mesures sont consignés dans le tableau suivant. Les degrés de concentration indiqués sont les plus forts qu'on ait pu obtenir, au moins avec l'éther et avec l'alcool [1]).

[1]) Toutes les déterminations du pouvoir rotatoire spécifique, inscrites dans ce tableau ou dans les suivants, ont été faites de la manière que j'ai décrite antérieurement. Un certain poids de la substance était mélangé avec l'agent dissolvant dans un petit matras gradué, où la solution occupait un volume déterminé, d'environ 20 c.c.; le liquide était alors examiné au polaristrobomètre. Le p.r.s. de la matière se calculait ensuite par la formule

$$(\alpha)_D = \frac{V\alpha}{lp}.$$

Nature du dissolvant.	Nombre de grammes de la matière en 100 c.c.	*l.*	α_D observé)	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
Alcool absolu	0.5020	303.8	1°35′5	↗ 104°.6
" "	"	"	1°36′	
" "	"	"	1°35′5	
" "	1.0160	"	3°12′5	↗ 103°.9
" "	"	"	3°12′5	
" "	"	"	3°12′5	
" "	"	"	3°13′	
" "	1.4940	"	4°39′	↗ 102°.8
" "	"	"	4°39′	
" "	1.7735	"	5°26′5	↗ 100°.7
" "	"	"	5°27′5	
Alcool à 90 p. c. en poids	1.6475	"	5° 5′	↗ 101°.5
Ether absolu	0.4583	"	1°40′5	↗ 121°.4
" "	"	"	1°40′5	
" "	"	"	1°41′5	
" "	1.0239	"	3°45′	↗ 119°.9
" "	"	"	3°43′	
" "	"	"	3°44′	
Chloroforme	0.7220	"	2° 9′5	↗ 94°.9
"	"	"	2° 9′	
"	"	"	2° 8′	
"	"	"	2° 8′5	
"	1.5120	303.8	4°18′5	↗ 94°.0
"	"	"	4°19′5	
"	"	"	4°19′	
"	2.2350	"	6°29′	↗ 93°.3
"	"	"	6°28′	
"	"	"	6°27′	
Benzol	0.8560	"	2°35′	↗ 99°.3
"	"	"	2°36′	
"	"	"	2°33′	
"	"	"	2°35′	
"	7.4890	"	4°35′	↗ 100°.9
"	"	"	4°33′	
"	"	"	4°32′5	
"	"	"	4°34′	

Il résulte de ces données que le pouvoir rotatoire spécifique de la quinamine n'est pas le même pour des solutions dans des

liquides neutres différents, et qu'il dépend, dans tous les cas étudiés, du degré de concentration.

A l'aide d'une représentation graphique, on déduit des chiffres ci-dessus les valeurs suivantes de $(\alpha)_D$ pour les dissolutions dans l'alcool absolu et dans le chloroforme:

Alcool absolu.

$\frac{p}{100\,V}$	= 0.5	$(\alpha)_D$ =	↗ 104°.6
„	= 1	„ =	104°.0
„	= 1.5	„ =	102°.2
„	= 2	„ =	99°.1

Chloroforme.

$\frac{p}{100\,V}$	= 0.5	$(\alpha)_D$ =	↗ 95°.2
„	= 1	„ =	94°.6
„	= 1.5	„ =	94°.0
„	= 2	„ =	93°.4
„	= 2.5	„ =	92°.8

Réactions de la quinamine.

M. Hesse, dans son Mémoire inséré au tome 166 des Liebig's *Annalen*, a attiré l'attention sur les changements de couleur que subissent les solutions des sels de quinamine quand on y ajoute une solution de chlorure d'or ou de chlorure de platine. Eu égard au caractère instable de l'alcaloïde, on pouvait supposer que ces changements de couleur étaient dus à des phénomènes d'oxydation, et il était probable que l'application d'autres agents oxydants donnerait lieu à des phénomènes analogues.

Ayant entrepris des expériences à ce sujet, je rencontrai dès l'abord une difficulté, consistant en ce que plusieurs des réactifs

employés sont eux-mêmes colorés (l'acide chromique, par exemple), ou forment des précipités (comme c'est le cas pour le chlorure d'or), ce qui masque plus ou moins le phénomène.

Cela me suggéra l'idée d'essayer, non-seulement l'action de réactifs entièrement incolores, mais aussi celle de substances gazeuses, et j'arrivai ainsi à découvrir que les sels de quinamine sont très sensibles à l'action du peroxyde de chlore, et, en outre, que les changements de couleur éprouvés dépendent de différentes circonstances, surtout de l'absence ou de la présence d'acide sulfurique libre et du degré de concentration des solutions. Je communique ici quelques réactions à l'aide desquelles on peut reconnaître facilement même des quantités très petites de quinamine (des fractions de 1 milligramme).

1°. Lorsqu'on laisse couler avec précaution une goutte d'une solution d'un sel de quinamine sur de l'acide sulfurique concentré et contenant une petite quantité d'acide nitrique, on observe, au point où les deux liquides se mêlent, une coloration d'un brun châtain si la solution du sel de quinamine est concentrée, et d'un orangé magnifique si la solution est plus étendue. Ajoute-t-on ensuite peu à peu de l'eau au mélange liquide, celui-ci vire d'abord au pourpre et devient finalement d'un rose pâle.

2°. Sur du fort papier ordinaire on écrit (en se servant d'une plume d'oie) avec une solution médiocrement concentrée de quinamine dans une petite quantité d'acide sulfurique, puis on pose ce papier sur un verre de montre dans lequel on a mis un peu d'acide sulfurique concentré et quelques grains de chlorate de potasse: au bout de quelques secondes, l'écriture devient brunâtre ou olivâtre. Le papier étant ensuite abandonné à l'air, les lettres prennent, après un temps plus ou moins long, une couleur rose.

Lorsque la solution du sel de quinamine, avant d'être mise en contact avec le peroxyde de chlore, est mélangée avec une quantité assez considérable d'acide sulfurique concentré, les phénomènes sont tout différents. La coloration brune ou olivâtre, dont il a été question ci-dessus, se manifeste alors beaucoup plus promptement. Si, au bout de quelques secondes, on expose à

l'air le papier couvert d'écriture, la teinte brun sale passe peu à peu à un superbe bleu de ciel et, dans le cas où la solution contient relativement beaucoup de quinamine, à un noir bleuâtre foncé. Quand on humecte les caractères bleus avec de l'eau, ils deviennent roses; et réciproquement, en faisant tomber une goutte d'acide sulfurique un peu concentré sur des caractères roses, on peut quelquefois observer, surtout au bord, la formation d'une substance bleue.

Ces phénomènes prouvent, je crois, que l'oxydation de la quinamine par le peroxyde de chlore donne lieu à une combinaison chimique qui est bleue à l'état anhydre, mais de couleur rose en solution aqueuse. Cette combinaison rappelle tout à fait, sous ce rapport, le chlorure de cobalt, qui, lui aussi, est bleu à l'état anhydre ou dans une solution très concentrée et contenant beaucoup d'acide chlorhydrique, tandis que, dissous dans l'eau, il présente une couleur rose.

Remarquons, d'ailleurs, que la réaction en présence du peroxyde de chlore, qui vient d'être décrite, ne se produit pas avec la quinine, la quinidine, la cinchonine, la cinchonidine, la quinicine et la cinchonicine.

Sels de quinamine.

M. Hesse a étudié quelques sels de quinamine et a trouvé que l'iodhydrate neutre cristallisait facilement, que le chlorhydrate neutre, le tartrate neutre et le tartrate acide étaient au contraire amorphes, que le sulfate neutre ne s'obtenait qu'avec peine en cristaux, et que l'acétate se décomposait très facilement dans ses solutions, en abandonnant de la quinamine libre.

Mes expériences ont entièrement confirmé les résultats énoncés par M. Hesse pour les sels en question. J'ai aussi essayé inutilement d'obtenir un *sulfate acide* cristallisé ($C_{19}H_{24}N_2O_2$,

$SH_2 O_4 + x\,aq$), un *bromhydrate* neutre et un *oxalate* neutre. Les solutions préparées synthétiquement se réduisirent sous l'exsiccateur en masses gommeuses, et la préparation qui correspondait à la composition d'un sulfate acide se colora peu à peu en brun assez foncé. Je présume qu'une transformation de quinamine en quinamicine avait déjà lieu en ce cas.

La solution du formiate préparé synthétiquement montrait plus de tendance à cristalliser par évaporation lente, et je ne doute pas que ce sel ne fût facile à obtenir sous la forme cristalline, si on opérait sur une échelle un peu grande. Dans mes expériences en petit, avec $\frac{1}{2}$—1 gramme de quinamine, j'obtins, par l'évaporation spontanée de la solution, des cristaux solubles dans l'eau, mais en même temps une masse gommeuse.

La cristallisation du *chlorate*, du *perchlorate* et du *nitrate* est relativement facile, et ces sels, une fois obtenus à l'état sec, sont très stables, au moins si on ne les expose pas à l'action directe de la lumière solaire.

Le *nitrate* ($C_{19} H_{24} N_2 O_2$, $NO_3 H$) est anhydre et se dépose, soit pendant l'évaporation lente d'une solution saturée mise sous l'exsiccateur, soit pendant le refroidissement d'une solution concentrée chaude, en cristaux appartenant au système monoclinique. Dans différents cristaux j'ai observé les combinaisons ∞ P.— Ꝑ ∞ et ∞ P. + Ꝑ ∞.— Ꝑ ∞. Le sel sec se colore peu à peu en jaune brunâtre sous l'influence de la lumière solaire et se dissout, à une température de 15° C., dans 16,53 parties d'eau. Dans l'eau chaude et dans l'alcool il est beaucoup plus soluble.

Les déterminations du pouvoir rotatoire spécifique m'ont donné, pour une température de 16° C. et pour des solutions dans l'eau et dans l'alcool, les résultats suivants.

Nature du dissolvant.	Nombre de grammes en 100 C. C.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
Eau	0.997	303.8	2°55′	↗ 96°.8
"	"	"	2°58′	
"	"	"	2°54′	
"	1.934	"	5°50′	↗ 97°.0
"	"	"	5°52′	
"	"	"	5°50′	
"	"	"	5°51′	
Alcool absolu	0.9945	"	3°18′	↗ 109°.2
" "	"	"	3°18′	
" "	2.036	"	6°46′	↗ 109°.6
" "	"	"	6°48′	

En calculant à l'aide de ces données le p. r. s. de la quinamine sous la forme de nitrate [1]), on trouve:

pour les solutions dans l'eau $(\frac{1}{100} - \frac{2}{100})$ $(\alpha)_D = \nearrow$ 116°,3—116°,8

" " " " l'alcool $(\frac{1}{100} - \frac{2}{100})$ $(\alpha)_D = \nearrow$ 131°,3—131°,8

Le *chlorate* est également anhydre et cristallise dans le système rhombique. Les formes que j'ai observées le plus fréquemment sont la double pyramide P et les combinaisons OP. ∞ P; OP. ∞ P. $\overline{P}\infty$ et ∞ P. $\breve{P}\infty$.

Le sel se dissout dans 137 parties d'eau à 16° C, mais beaucoup mieux dans l'alcool et dans l'eau à une température plus élevée. La solution aqueuse, surtout en présence d'un excès d'acide chlorique, se colore peu à peu en rouge brunâtre à la lumière solaire ou quand on la chauffe.

Le *perchlorate* se dépose de ses solutions aqueuses sous la forme de cristaux anhydres, qui appartiennent probablement au système monoclinique et qui présentent des macles très analogues à celles du gypse. Ces cristaux, toutefois, sont peu déterminables. En gros, ils ressemblent beaucoup à ceux de l'iodhydrate.

[1]) Dans ce calcul, ainsi que dans les calculs analogues suivants, on a attribué à la quinamine la formule $C_{19} H_{24} N_2 O_2$.

La détermination du pouvoir rotatoire spécifique a fourni, pour des solutions alcooliques et pour une température de 16° C., les nombres suivants:

Nature du dissolvant.	Nombre de grammes en 100 C. C.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
Alcool absolu	0.709	303.8	2° 9′	↗ 99°.3
" "	"	"	2° 8′	
" "	"	"	2° 9′	
" "	2.1335	"	6°25′	↗ 101°.8
" "	"	"	6°23′	
" "	"	"	6°25′	

A l'aide de ces chiffres, on calcule pour le p. r. s. de l'alcaloïde à l'état de perchlorate (la concentration étant de $\frac{1}{140}$ — $\frac{1}{47}$): $(\alpha)_D$ = ↗ 131°.2—134°.3.

La forme cristalline de l'*iodhydrate* n'a pu être déterminée. La solubilité du sel dans l'eau est plus grande que celle du perchlorate. J'ai trouvé, en effet, qu'à 16° C. 1 partie d'iodhydrate se dissolvait dans 71 parties d'eau. A des températures plus élevées, l'eau en dissout beaucoup plus, et, de même que les sels précédents, l'iodhydrate est aussi dissous beaucoup plus facilement par l'alcool que par l'eau.

Les déterminations du pouvoir rotatoire spécifique ont donné, pour des solutions alcooliques, à la température de 16° C., les résultats suivants:

Nature du dissolvant.	Nombre de grammes en 100 C. C.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
Alcool absolu	1.068	303.8	2°59′	↗ 92°.5
" "	"	"	3° 0′	
" "	"	"	3° 2′	
" "	"	"	3° 0′5	
" "	1.644	"	4°41′	↗ 94°.4
" "	"	"	4°44′	
" "	"	"	4°43′	
" "	2.310	"	6°42′	↗ 95°.8
" "	"	"	6°43′	
" "	"	"	6°44′	

En appliquant le calcul à ces nombres, on obtient pour le pouvoir rotatoire spécifique de la quinamine, prise aux degrés de concentration indiqués, les valeurs: $\nearrow$ 130°,3—133°,0—135°,0.

Au sujet du *chloroplatinate* de quinamine, M. Hesse dit qu'il se distingue des sels correspondants des autres alcaloïdes du quinquina par sa grande solubilité dans l'eau. D'après lui, le chlorure de platine ne formerait que dans les solutions très concentrées du chlorhydrate un précipité floconneux jaune, qui serait redissous par une faible addition d'eau. Comme, en outre, le sel se décompose aisément dans sa solution aqueuse, M. Hesse a dû renoncer à la préparation du chloroplatinate sec et à l'analyse de cette combinaison.

Le grand intérêt qui s'attache à la connaissance de la composition du chloroplatinate de quinamine me conduisit à essayer, malgré l'insuccès éprouvé par M. Hesse, la préparation de ce sel. A cet effet, je formai d'abord, par synthèse, une solution du chlorhydrate acide de quinamine $C_{19}H_{24}N_2O_2$, 2 H Cl dans une petite quantité d'eau, et j'y ajoutai la quantité de chlorure de platine qui, d'après le calcul, était nécessaire pour la production du chloroplatinate Pt Cl_4 ($C_{19}H_{24}N_2O_2$), 2 H Cl. Le résultat fut négatif: il ne se forma pas de précipité, et la solution, placée dans l'obscurité sous un exsiccateur, se dessécha peu à peu en une masse amorphe, mais partiellement décomposée.

Sur ces entrefaites, j'eus connaissance du Mémoire déjà cité (page 359) de M. Jörgensen sur la composition du *soi-disant* chlorure de platine, et j'appris ainsi que, lors du mélange d'une solution de cette matière avec une solution de chlorhydrate acide de quinamine, 2 molécules d'acide chlorhydrique devaient devenir libres, si le chloroplatinate de quinamine avait une composition analogue à celle des chloroplatinates des autres alcaloïdes, mieux connus, du quinquina ($Pt\,Cl_6H_2 + C_{19}H_{24}N_2O_2$, 2 H Cl $=$ Pt Cl_6, $C_{19}H_{24}N_2O_2$ + 2 H Cl). Or, comme il se pouvait que le chloroplatinate de quinamine fût soluble dans l'acide chlorhydrique étendu, je réduisis autant que possible, dans une seconde expérience, la quantité d'acide chlorhydrique, en ajoutant à une

solution de chlorhydrate *neutre* de quinamine une solution passablement concentrée d'acide platino-chlorhydrique. Effectivement j'obtins ainsi, sans la moindre peine, le chloroplatinate désiré, sous la forme d'un précipité amorphe jaune, qui, une fois séparé par le filtre de Bunsen, se laissait parfaitement laver avec de l'eau, où il ne se dissolvait que très peu.

Quand le sel a été séché à l'air, il forme une matière amorphe jaune, qui est assez stable, ou qui du moins ne se décompose pas dans l'espace de quelques semaines. Il supporte une température de 100° C. sans subir une altération chimique profonde; il perd seulement son eau de combinaison et prend en même temps une couleur un peu plus foncée. A une température un peu plus élevée (120°—130° C.), la décomposition paraît déjà se produire; la matière commence à s'agglutiner et sa couleur devient beaucoup plus foncée.

En présence de l'eau, le chloroplatinate est beaucoup moins stable qu'à l'état de siccité parfaite. Lorsqu'on abandonne sous une couche d'eau, dans l'obscurité, une petite quantité de la combinaison récemment précipitée et lavée, l'eau se colore peu à peu en jaune clair; mais, de la diminution très légère de la quantité de matière non dissoute, il est facile de conclure que la solubilité du sel dans l'eau *pure* est très faible. Au bout d'une couple de semaines de contact avec l'eau, le sel solide, de même que le liquide, a pris une couleur rose, et en fin de compte il ne reste, outre du platine réduit, qu'une combinaison rose presque insoluble dans l'eau et dans l'alcool, qui, recueillie sur un filtre, est colorée en bleu par l'acide chlorhydrique concentré, se dissout un peu dans l'alcool additionné d'acide chlorhydrique, en donnant lieu à un liquide bleu clair, et paraît être en général assez stable. Il est probable que cette matière est identique à celle qui prend naissance par l'action du peroxyde de chlore sur la quinamine.

La solution très étendue de chloroplatinate de quinamine, imbibée dans du papier à filtre, y est peu à peu réduite en la même combinaison bleue, qui toutefois devient graduellement rose quand on l'humecte avec de l'eau.

Les résultats des analyses du chloroplatinate de quinamine ont été les suivants:

1) 0,4479 gr. de sel séché à l'air ont perdu, par la dessiccation à 100 C°, 0,0260 gr. d'eau.

2) 0,5087 gr. de sel séché à l'air ont perdu, par la dessiccation à 100° C, 0,0299 gr. d'eau.

3) 0,4300 gr. de sel séché à 100° C. ont donné, par combustion avec le chromate de plomb, 0,6802 gr. CO_2 et 0,2340 gr. H_2O.

4) 0,2333 gr. de sel séché à 100° C. ont donné 0,3798 gr. CO_2 et 0,1223 gr. H_2O.

5) 0,4489 gr. de sel séché à 100° C. ont laissé, après calcination ménagée, 0,0846 gr. de platine.

6) 0,2404 gr. de sel séché à 100° C. ont laissé, après calcination, 0,0472 gr. de platine.

7) 0,4880 de sel *séché à l'air* ont donné 0,0894 gr. de platine et 0,3802 gr. Ag Cl.

Au moyen de ces résultats on trouve par le calcul, pour la quantité d'eau contenue en 100 parties de sel, le nombre 5,85—5,9, correspondant environ à 3 H_2O sur 1 molécule de chloroplatinate anhydre, et, pour la proportion de C, H, Pt et Cl dans la matière séchée à 100° C., les nombres suivants:

	3)	4)	5)	6)	7)
C	43,1	44,2	—	—	—
H	6,0	5,8	—	—	—
Pt	—	—	18,8	19,6	19,5
Cl	—	—	—	—	20,5

Ces nombres s'accordent assez bien avec la formule 2 (Q, HCl), Pt Cl_4 pour le sel sec, formule où Q peut être exprimé soit par $C_{19}H_{24}N_2O_2$, soit par $C_{20}H_{26}N_2O_2$. Le calcul donne en effet, dans ces deux hypothèses, pour la composition du chloroplatinate sec:

	$2\,(C_{19}H_{24}N_2O_2, HCl)\,Pt\,Cl_4$	$2\,(C_{20}H_{26}N_2O_2, HCl)\,Pt\,Cl_4$.
C	43,0	44,9
H	4,8	5,1
Pt	19,1	18,5
Cl	20,5	20,0

A raison de la proportion beaucoup trop forte trouvée pour l'hydrogène, on pourrait se demander, toutefois, si le chloroplatinate séché à 100° ne contiendrait pas encore de l'eau combinée? En tenant compte des nombres obtenus pour le chlore et le platine, je regarde cette supposition comme peu probable et je crois devoir attribuer le chiffre trop élevé de l'hydrogène à une erreur de l'analyse, due à la présence d'hydrogène occlus dans la gaze de cuivre employée.

Quoique n'offrant pas assez de concordance pour trancher la question de la formule moléculaire de la quinamine, les nombres communiqués ne laissent pourtant pas subsister de doute quant au fait que la quinamine est une base mono-acide, résultat entièrement en harmonie, comme on le verra, avec les conclusions de l'examen relatif à l'influence des acides en excès sur le pouvoir rotatoire spécifique de la quinamine.

Pouvoir rotatoire spécifique de la quinamine dissoute dans un excès d'acide.

Dans mon Mémoire „Sur le pouvoir rotatoire spécifique des principaux alcaloïdes du quinquina, à l'état libre et à l'état combiné" (*Arch. néerl. des sc. ex. et nat.*, t. X, p. 193 et suiv.), j'ai donné les résultats de quelques recherches concernant l'influence que des quantités différentes de plusieurs acides inorganiques et organiques exercent, dans des conditions du reste semblables, sur le pouvoir rotatoire spécifique des quatre alcaloïdes les mieux connus du quinquina. Un poids d'environ 316 milligr. d'alcaloïde était mélangé avec la quantité voulue d'acide et avec la quantité d'eau nécessaire pour parfaire, à 17° C., le volume de 20 c.c.: la solution ainsi obtenue était soumise à l'examen optique.

J'ai exécuté ce même travail pour la quinamine, à la température de 16° C., en prenant chaque fois environ 0,326 gr. d'alcaloïde, qui, après addition de la quantité déterminée d'acide, étaient étendus d'eau de manière à occuper de nouveau un volume de 20 c.c. Les acides employés sont les mêmes que

ceux dont j'avais étudié l'influence précédemment; seules les expériences avec l'acide perchlorique ont été omises, parce que cet acide forme avec la quinamine un sel très peu soluble dans l'eau.

Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux suivants:

Acide chlorhydrique.

Poids de quinamine en 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules ClH pour 1 mol. d'alcaloïde.	t.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3265 gr.	1 [1])	303.8	5°41′	
" "	"	"	5°40′.5	↗ 114°.4
" "	"	"	5°40′	
0.3334 "	2	"	5°56′	↗ 117°.6
" "	"	"	5°57′	
0.3218 "	3	"	5°43′	↗ 116°.9
" "	"	"	5°43′.5	
0.3224 "	4	"	5°45′	
" "	"	"	5°44′.5	↗ 117°.1
" "	"	"	5°42′.5	
" "	"	"	5°46′	
0.3249 "	7	"	5°47′	
" "	"	"	5°49′	↗ 117°.3
" "	"	"	5°47′	
0.3290 "	10	"	5°48′	
" "	"	"	5°53′	↗ 117°.0
" "	"	"	5°51′	
" "	"	"	5°51′	
0.3228 "	20	"	5°41′	↗ 115°.9
" "	"	"	5°40′	
" "	"	"	5°41′	
0.3270 "	30	"	5°38′.5	
" "	"	"	5°35′	↗ 112°.8
" "	"	"	5°35′	
" "	"	"	5°36′	
0.3266 "	40	"	5°22′	↗ 108°.2
" "	"	"	5°22′	

[1]) Par l'addition de 1 moléc. d'un acide monobasique ou de $\frac{1}{2}$ moléc. d'un acide bibasiqne il n'était pas possible de dissoudre complétement l'alcaloïde; il fallait augmenter un peu la dose d'acide. Ce surplus, toutefois, ne s'élevait ordinairement qu'à $\frac{1}{20}$ de moléc., dans un seul cas à $\frac{1}{10}$. Eu égard à la faible variation du p. r. s. de la quinamine sous l'influence des acides, ces petits écarts de la quantité d'acide exactement suffisante peuvent être regardés comme n'ayant

Acide nitrique.

Poids de quinamine en 20 C.C de la solution.	Nombre de molécules NO_3H pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
[1])	1	—	—	↗ 116°.5
0.3286 gr.	2	303.8	5°50′	↗ 116°.8
" "	"	"	5°50′	
0.3272 "	3	"	5°49′	↗ 117°.7
" "	"	"	5°51′	
0.3281 "	4	"	5°50′	↗ 117°.0
" "	"	"	5°50′	
" "	"	"	5°50′5	
" "	"	"	5°50′	
0.3273 "	7	"	5°48′5	↗ 116°.7
" "	"	"	5°48′	
0.3288 "	12	"	5°44′	↗ 114°.8
" "	"	"	5°43′5	
" "	"	"	5°44′	
0.3263 "	20	"	5°38′5	↗ 114°.4
" "	"	"	5°41′	
" "	"	"	5°41′	

Acide chlorique.

Poids de quinamine en 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules ClO_3H pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3250 gr.	1	303.8	5°42′	↗ 116°.1
" "	"	"	5°44′	
" "	"	"	5°45′	
" "	"	"	5°46′	
0.3235 "	2	"	5°42′	↗ 116°.0
" "	"	"	5°43′	
" "	"	"	5°42′	

aucune importance. Le poids de 0,326 gr. de quiamine est calculé d'après l'ancienne formule de M. Hesse ($C_{20}H_{26}N_2O_2$). En adoptant la nouvelle formule $C_{19}H_{24}N_2O_2$), on aurait dû dissoudre 0,312 gr.; mais cette différence n'exerce pas non plus une influence sensible sur le p. r. s.

[1]) Déduit du pouvoir rotatoire du nitrate neutre dissous dans l'eau.

Acide chlorique.

Poids de quinamine en 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules ClO_3H pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3124 gr.	4	303.8	5°43′	
" "	"	"	5°45′	↗ 117°.2
" "	"	"	5°44′	
0.3266 "	8	"	5°46′	
" "	"	"	5°47′	↗ 116°.3
" "	"	"	5°45′.5	
0.3232 "	15	"	5°45′	↗ 115°.2
" "	"	"	5°44′	

Acide acétique.

Poids de quinamine en 20 C. C. de la solution.	Nombre de molécules $C_2H_4O_2$ pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3258 gr.	1	303.8	5°44′	↗ 116°.2
" "	"	"	5°46′	
0.3300 "	2	"	5°49′	
" "	"	"	5°52′	↗ 116°.6
" "	"	"	5°52′.5	
" "	"	"	5°49′	
0.3218 "	3	"	5°43′	↗ 116°.9
" "	"	"	5°43′.5	
0.3254 "	4	"	5°48′	↗ 117°.5
" "	"	"	5°49.5	
" "	"	"	5°49′	
0.3253 "	5	"	5°47′	↗ 118°.0
" "	"	"	5°48′.5	
" "	"	"	5°49′	
0.3239 "	10	"	5°50′	↗ 118°.0
" "	"	"	5°49′.5	
" "	"	"	5°47′	
" "	"	"	5°48′	
0.3255 "	20	"	5°49′.5	↗ 117°.9
" "	"	"	5°49′	
" "	"	"	5°49′	
0.3253 "	40	"	5°49′.5	↗ 117°.9
" "	"	"	5°49′.5	

Acide formique.

Poids de quinamine en 20 C. C. de la solution.	Nombre de molécules CH_2O_2 pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3249 gr.	1	303.8	5°40′	↗ 114°.7
" "	"	"	5°40′	
0.3230 "	2	"	5°45′	↗ 117°.2
" "	"	"	5°45′	
0.3278 "	4	"	5°51′	↗ 117°.5
" "	"	"	5°51′	
0.3274 "	10	"	5°52′	↗ 116°.5
" "	"	"	5°49′.5	
0.3298 "	20	"	5°51′	↗ 116°.8
" "	"	"	5°51′	
0.3295 "	60	"	5°49′	↗ 116°.6
" "	"	"	5°51′	
" "	"	"	5°51′	

Acide sulfurique.

Poids de quinamine en 20 C. C. de la solution.	Nombre de molécules SO_4H_2 pour 1 mol d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3259 gr.	½	303.8	5°44′	↗ 115°.8
" "	"	"	5°43′	
" "	"	"	5°44′	
0.3254 "	1	"	5°47′.5	↗ 116°.4
" "	"	"	5°44′.5	
" "	"	"	5°45′	
" "	"	"	5°46′	
0.3279 "	1½	"	5°49′	↗ 116°.8
" "	"	"	5°49′	
" "	"	"	5°49′	
0.3244 "	2	"	5°42′.5	↗ 116°.4
" "	"	"	5°43′	
" "	"	"	5°45′	
" "	"	"	5°45′	
0.3242 "	3½	"	5°43′	↗ 116°.3
" "	"	"	5°44′	
" "	"	"	5°43′	

Acide sulfurique.

Poids de quinamine en 20 C. C. de la solution.	Nombre de molécules SO_4H_2 pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3270 gr.	5	303.8	5°50′	↗ 116°.5
" "	"	"	5°50′.5	
0.3292 "	10	"	5°50′	↗ 116°.6
" "	"	"	5°50′.5	
0.3266 "	20	"	5°41′	
" "	"	"	5°42′	↗ 114°.9
" "	"	"	5°43′	
0.3267 "	30	"	5°30′	
" "	"	"	5°32′	↗ 111°.3
" "	"	"	5°32′	

Acide oxalique.

Poids de quinamine en 20 C. C. de la solution.	Nombre de molécules $C_2H_2O_4$ pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm		
0.3235 gr.	½	303.8	5°44′	
" "	"	"	5°44′	↗ 116°.8
" "	"	"	5°45′	
0.3272 "	1	"	5°52′	
" "	"	"	5°50′	↗ 118°.1
" "	"	"	5°53′	
" "	"	"	5°52′	
0.3305 "	2	"	5°54′	↗ 117°.5
" "	"	"	5°54′	
0.3231 "	4	"	5°45′	↗ 117°.2
" "	"	"	5°45′	
0.3269 "	6	"	5°49′	↗ 117°.2
" "	"	"	5°49′	
0.3264 "	10	"	5°48′	↗ 116°.8
" "	"	"	5°47′	

Acide phosphorique.

Poids de quinamine en 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules PO_4H_3 pour 1 mol. d'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
		mm.		
0.3273 gr.	1	303.8	5°51′	
" "	"	"	5°49′	↗ 117°.3
" "	"	"	5°49′	
0.3272 "	2	"	5°48′	
" "	"	"	5°50′	↗ 117°.2
" "	"	"	5°50′	
0.3266 "	4	"	5°47′.5	
" "	"	"	5°46′	↗ 116°.6
" "	"	"	5°48′	
0.3252 "	8	"	5°47′	
" "	"	"	5°46′	↗ 116°.7
" "	"	"	5°45′	
0.3267 "	20	"	5°46′	
" "	"	"	5°45′	↗ 116°.2
" "	"	"	5°46′	

Considérations sur un rapport probable entre le caractère chimique et le pouvoir rotatoire spécifique, d'après les résultats qui précèdent.

Les résultats obtenus au sujet de l'influence que les acides exercent sur le pouvoir rotatoire spécifique de la quinamine s'accordent, sous beaucoup de rapports, avec ceux auxquels m'avait conduit antérieurement une étude analogue des alcaloïdes plus généralement connus du quinquina.

---

[1]) Avec ⅓ et ⅔ de molécule d'acide phosphorique, même en chauffant légèrement, on ne put faire dissoudre l'alcaloïde.

Maintenant encore, nous voyons le p. r. s. de l'alcaloïde atteindre un maximum pour une certaine quantité d'acide ajouté, et décroître ensuite peu à peu quand cette quantité continue à augmenter. L'explication de ce phénomène, donnée précédemment, pourra s'appliquer aussi au cas actuel.

A maints égards, toutefois, il y a des différences importantes entre les résultats anciens et nouveaux.

En premier lieu, il saute aux yeux que les maxima de p. r. s., relatifs aux divers acides employés, sont pour la quinamine beaucoup plus voisins les uns des autres; c'est ce que met en évidence le tableau suivant, où ces maxima sont réunis. J'ai trouvé:

pour l'acide	oxalique . . .	un	maximum	de	↗	118°,1
„ „	acétique. . . .	„	„	„		118 ,0
„ „	nitrique	„	„	„		117 ,7
„ „	chlorhydrique.	„	„	„		117 ,6
„ „	formique . . .	„	„	„		117 ,5
„ „	phosphorique .	„	„	„		117 ,3
„ „	chlorique . . .	„	„	„		117 ,2
„ „	sulfurique . . .	„	„	„		116 ,8

La plus grande différence s'élève à peine, comme on le voit, à 1 pour cent de la valeur du p. r. s.

Ce fait me paraît digne d'attention. L'étroit accord qui règne entre ces maxima semble indiquer l'existence d'une loi naturelle, qu'on pourrait provisoirement exprimer en disant que le p. r. s. des alcaloïdes est modifié de la même manière par des acides différents, pourvu que les combinaisons formées puissent être mises sur la même ligne en ce qui concerne la saturation de la base organique par l'acide.

Les résultats obtenus antérieurement avec les quatre principaux alcaloïdes du quinquina sont, au moins en apparence, en contradiction avec cette loi, car j'ai trouvé alors que les maxima relatifs à la quinine, la quinidine, la cinchonine et la cinchonidine présentaient entre eux des différences notables, montant à 5 ou 6 pour cent de la valeur totale du p. r. s.

C'est une question, toutefois, de savoir si ces écarts ne doivent pas s'expliquer par l'influence que le degré de concentration exerce sur le p. r. s. Si l'on pouvait éliminer cette influence, et étudier à l'état isolé, sous le rapport de leur p. r. s., les substances dont j'avais examiné les solutions, on trouverait peut-être que les susdits écarts n'existent pas et que ces quatre bases du quinquina possèdent toujours, à l'état de sels acides, le même pouvoir rotatoire, quel que soit l'acide employé à la formation du sel.

Je suis d'autant plus porté à admettre cette possibilité, qu'il me semble très improbable que des corps du même caractère chimique se comportent différemment en ce qui concerne le changement du p. r. s. sous l'influence des acides.

Il est encore un autre point qui mérite attention, à savoir, que le maximum du pouvoir rotatoire est déjà à peu près atteint par l'addition, à 1 molécule de quinamine, de 1 molécule d'un acide monobasique ou de $\frac{1}{2}$ molécule d'un acide bibasique. Sous ce rapport, il y a une différence notable entre la quinamine et les alcaloïdes du quinquina étudiés précédemment, et cette différence est surtout frappante lorsqu'on considère l'influence exercée sur le p. r. s. par des acides organiques relativement faibles, tels que l'acide acétique et l'acide formique. Pour la quinine, la cinchonine, la quinidine et la cinchonidine, le p. r. s., après l'addition de 2 moléc. d'acide acétique ou d'acide formique à 1 moléc. d'alcaloïde, est encore beaucoup au-dessous du maximum qu'on peut atteindre, tandis que pour la quinamine on obtient avec un minimum d'acide, pourvu qu'il soit suffisant pour opérer la dissolution, un p. r. s. qui n'augmente presque plus sous l'influence d'une quantité d'acide beaucoup plus grande que celle nécessaire à la formation d'un sel acide. La preuve de ce que je viens de dire est fournie par le tableau suivant, qui n'a besoin d'aucune explication spéciale:

	Quinine.	Quinidine.	Cinchonine.	Cinchonidine.	Quinamine.
P. r. s. après l'addition de 1 mol. d'ac. acétique à 1 mol. d'alcaloïde.	non déterminé.	non déterminé.	non déterminé.	non déterminé.	↗ 116°.2
P. r. s. après l'addition de 2 mol. d'ac. acétique à 1 mol. d'alcaloïde.	↖ 191°.1	↗ 248°.6	↗ 217°.3	↖ 136°.1	↗ 116°.6
Maximum du p. r. s. sous l'influence de l'ac. acétique.	↖ 278°.9	↗ 318°.4	↗ 250°.5	↖ 173°.8	↗ 118°.0
P. r. s. après l'addition de 1 mol. d'ac. formique à 1 mol. d'alcaloïde.	non déterminé.	236°.3	non déterminé.	non déterminé.	↗ 114°.7
P. r. s. après l'addition de 2 mol. d'ac. formique à 1 mol d'alcaloïde.	↖ 172°.6	↗ 286°.2	↗ 242°2.	↖ 157°.0	↗ 117°.2
Maximum du p. r. s. sous l'influence de l'acide formique.	↗ 280°.6	↗ 325°.8	↗ 258°.9	↖ 177°.9	↗ 117°.5

Je crois pouvoir attribuer la différence qui existe, par rapport à l'influence des acides sur le p. r. s., entre la quinamine et les quatre autres alcaloïdes du quinquina, à ce que la première est une base mono-acide, tandis que les quatre autres corps possèdent un caractère bi-acide. La composition du chloroplatinate de quinamine et des chloroplatinates des autres alcaloïdes du quinquina répond parfaitement aussi à cette dissimilitude de caractère: tandis que le sel de quinamine renferme sur une molécule $Pt\,Cl_4$ *deux* molécules d'alcaloïde et *deux* molécules $Cl\,H$, les autres chloroplatinates en question ne contiennent, sur une molécule $Pt\,Cl_4$, que *une* molécule d'alcaloïde et *deux* molécules $Cl\,H$.

Il ne me paraît pas improbable que la relation observée pour les bases du quinquina se retrouvera aussi chez d'autres alcaloïdes, et que, par suite, *la détermination du p. r. s. d'un de ces corps, sous l'influence de différentes quantités d'acide, pourra servir à juger de son caractère chimique et à décider si le corps est mono-acide, bi-acide ou poly-acide.*

En énonçant cette conjecture, qui devra être vérifiée par des recherches plus nombreuses, je ne dois pas négliger de signaler un fait qu'on pourrait tout d'abord lui opposer. D'après M. Hesse, en effet, le sulfate suracide de quinine $C_{20}H_{24}N_2O_2$, $2SH_2O_4+5H_2O$ possède dans certaines circonstances un p. r. s. propre, qui, calculé par rapport à la quinine, donne une valeur plus forte que celle qu'on déduit du p. r. s. du sulfate acide $C_{20}H_{24}N_2O_2$, $S\,H_2O_4 + 7\,H_2O$.

Les résultats de M. Hesse, dès l'instant où j'en eus connaissance, m'avaient beaucoup surpris, parce qu'ils me paraissaient directement contraires à ce que j'avais observé autrefois par rapport à l'influence d'un excès d'acide sulfurique sur le p. r. s. de la quinine. Pour la quinine ($p = 1{,}6$ d'après le mode d'expression de M. Hesse) associée à 2 mol. $S\,H_2O_4$, j'avais trouvé, en effet, $(\alpha)_D = \nwarrow 277^0.5$, et lorsque la quantité d'acide augmentait, le p. r. s. *s'abaissait.*

Supposant que la formation préalable d'une combinaison solide *pouvait* être pour quelque chose dans le résultat, et désirant en

tout cas vérifier les observations de M. Hesse, j'ai préparé le sulfate suracide et lui ai trouvé, après dissolution dans l'eau, un p. r. s. qui, rapporté à la quinine, différait effectivement un peu de celui que j'avais obtenu antérieurement pour cet alcaloïde en le dissolvant dans un grand excès d'acide (Voir la Note ci-après).

Bien que mes observations ne contredisent donc pas directement, sous ce rapport, celles de M. Hesse, il me semble pourtant, vu l'instabilité de la combinaison en question et la circonstance que, d'après mes expériences antérieures, elle ne se forme pas lorsqu'à une *solution* du sel $C_{20}H_{24}N_2O_2$, SH_2O_4 on ajoute une nouvelle quantité d'acide sulfurique, il me semble, dis-je, que ces observations ne peuvent pas être regardées comme un argument décisif contre l'hypothèse énoncée ci-dessus. Il me paraît probable que le sulfate suracide de quinine appartient aux combinaisons dites moléculaires et doit être placé sur la même ligne que l'acétate acide de potasse et d'autres sels analogues.

Les tableaux donnés p. 377—382 font voir que la quinamine, sous la forme de sels neutres, possède un pouvoir rotatoire spécifique à peu près constant. On peut se demander s'il en est de même lorsque ces sels sont dissous dans des liquides autres que l'eau. J'ai mentionné ci-dessus quelques sels cristallins dont le p. r. s. a été déterminé dans l'alcool absolu. En rapportant les nombres trouvés à la quinamine libre, on obtient, pour les limites de concentration indiquées, les valeurs suivantes du p. r. s.:

P. r. s. de la quinamine en dissolution alcoolique,

calculé d'après	le nitrate,	↗ 131°.3—131°.8
„ „	l'iodhydrate	130°.0—135°.0
„ „	le perchlorate	131°.2—134°.3

On voit qu'ici encore la concordance est assez grande.

Lors de mes recherches antérieures sur les quatre principaux alcaloïdes du quinquina, je n'avais pas trouvé une pareille uniformité dans le p. r. s. des sels dits normaux. Cela tient peut-être précisément au caractère bi-acide de ces bases. Il est possible, en effet, que dans la formation d'un sel par l'union de 1 mol. de quinine, de cinchonine, etc. avec 1 moléc. d'un acide monobasique,

l'influence de ce dernier sur le p. r. s. ne soit pas encore épuisée, et que, sous ce rapport, des acides différents se comportent d'une manière différente. Peut-être aussi y a-t-il à tenir compte ici de l'influence de la concentration.

De nouvelles recherches jetteront probablement plus de jour sur cette question.

NOTE.

Sur le pouvoir rotatoire spécifique du sulfate suracide de quinine: $C_{20}H_{24}N_2O_2$, $2H_2SO_4 + 5H_2O$.

Le sel fut préparé en dissolvant le sulfate acide $C_{20}H_{24}N_2O_2$, $H_2SO_4 + 7H_2O$ dans l'eau, ajoutant à la solution un excès d'acide et plaçant le mélange dans un exsiccateur sur l'acide sulfurique. Au bout de quelque temps il se forma des cristaux soyeux, qui furent séparés de l'eau-mère sur un filtre de Bunsen, lavés avec un peu d'eau, exprimés dans du papier à filtre, et séchés à l'air.

0,6175 gr. du sel donnèrent 0,4915 gr. $BaSO_4$.

0,3945 gr. du sel perdirent, par la dessiccation à 120° C., 0,0574 gr. d'eau.

On déduit de là:

		$C_{20}H_{24}N_2O_2$, $2SH_2O_4 + 5H_2O$
SO_4H_2.	33,4	32,0
eau de cristall. .	14,5	14,8

0,6064 gr. de ce sel furent dissous dans une quantité d'eau telle que la solution occupât 20 c.c. Le tube ayant une longueur de 303,9 mm., je trouvai pour α les valeurs suivantes:

13°26′	13°22′	13°23′
13°53′	13°56′	13°54′
13°58′	13°57′	13°56′
13°43′	13°56′	13°53′
13°45′	13°48′	13°46′,5

Moyenne: $\alpha = \nwarrow 13°46',5$.

$(\alpha)_D$ rapporté au sel $\nwarrow 149°,4$.

„ à la quinine $\nwarrow 281°,6$.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

RADCLIFFE LIBRARY
UNIVERSITY
16 FEB 79

NOTICE
SUR LES
INTÉGRALES

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x\,.\cos^2 x} \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x},$$

OÙ F EST UNE FONCTION GONIOMÉTRIQUE;

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Au moyen de la substitution $2x = y$, on trouve successivement

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy}{1+\frac{1}{4}p\sin^2 y} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy}{\cos^2 y} \frac{1}{\sec^2 y + \frac{1}{4}p\,tg^2 y};$$

d'où, en prenant $tg\,y = u$,

$$= \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2+\frac{1}{4}pu^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+(1+\frac{1}{4}p)u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}p}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{4+p}}, \quad (1)$$

suivant la valeur de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dz}{1+qz^2} = \frac{1}{\sqrt{q}} Arctg \frac{z}{\sqrt{q}}.$$

Pour la continuité de cette intégrale, il faut que $4+p>0$,

donc $p > -4$, comme on le supposera toujours dans cette notice, à moins qu'une autre condition ne soit formellement exprimée.

Pour trouver les intégrales

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} \text{ et } L = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x},$$

on a

$$K + L = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{4 + p}};$$

puis, à l'aide de la même substitution $2x = y$, comme ci-dessus,

$$L - K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos y\, dy}{1 + \frac{1}{4} p \sin^2 y} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \right] \frac{\cos y\, dy}{1 + \frac{1}{4} p \sin^2 y}.$$

Supposons dans la dernière intégrale, entre les crochets, $y = \pi - z$, on aura $dy = -dz$, $\cos y = -\cos z$, $\sin y = \sin z$, avec les limites $\frac{1}{2}\pi$ et 0; par conséquent

$$L - K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} = \tfrac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \right] \frac{\cos y\, dy}{1 + \frac{1}{4} p \sin^2 y} = 0. \quad (2)$$

Il s'ensuit $L = K$, puis

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{4 + p}}, \ldots\ldots \quad (3)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

On a de plus, pour le même y,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x . \cos x\, dx}{1 + p \sin^2 x . \cos^2 x} = \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sin y\, dy}{1 + \frac{1}{4} p \sin^2 y} = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin y\, dy}{1 + \frac{1}{4} p \sin^2 y} =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin y\, dy}{(4 + p) - p \cos^2 y}.$$

La substitution $\cos y = z$ donne ici

$$= 2\int_0^1 \frac{dz}{(4+p) - pz^2} = \frac{2}{4+p}\int_0^1 \frac{d}{1 - \frac{p}{4+p} z^2}.$$

Dans cette intégrale, il faut distinguer entre $\frac{p}{4+p}$ positif, d'où $p > 0$; et $\frac{p}{4+p}$ négatif, d'où $0 > p > -4$, c'est-à-dire la valeur absolue de $p < 4$. Pour ces deux cas séparément, on a

$$= \frac{1}{\sqrt{p(4+p)}}\, l \frac{1+z\sqrt{\frac{p}{4+p}}}{1-z\sqrt{\frac{p}{4+p}}}\Bigg/_0^1 = \frac{1}{\sqrt{p(4+p)}} \frac{\sqrt{4+p}+\sqrt{p}}{\sqrt{4+p}-\sqrt{p}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\,\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} - \sqrt{p})\}, (p > 0), \quad \ldots\ldots (5)$$

ou

$$= \frac{2}{\sqrt{-p(4+p)}} Arctg z\sqrt{\frac{-p}{4+p}}\Bigg/_0^1 = \frac{2}{\sqrt{-p(4+p)}} Arctg\sqrt{\frac{-p}{4+p}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-p(4+p)}} Arc\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}), (0 > p > -4) \quad \ldots\ldots (5^a)$$

Une réduction simple fournit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, dx}{1 + p\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \left(1 - \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\sqrt{4+p}}\right) = \frac{\pi}{2p}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}}\right), \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x\, dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} = (3)-(6) = \frac{\pi}{2p}\left(\frac{2+p}{\sqrt{4+p}} - 1\right), \quad \ldots (7)$$

$$= (4) - (6) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^4 x\, dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Par la substitution $x=\frac{\pi}{2}-z$, on obtient

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^3 x.\cos x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x.\cos^3 x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x},$$

dont la différence donne

$$4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x.\cos x.\cos 2\,x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin 4\,x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=0;\quad . \; . \; (9)$$

mais comme leur somme devient

$$2\,\mathrm{I}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x.\cos x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x},$$

on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^3 x.\cos x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{1}{\sqrt{p(4+p)}}\,l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\},\ p(>0),(10)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-p\,(4+p)}}\,Arc\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}),\ (0>p>-4),\ .\ (10^a)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x.\cos^3 x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

Jusqu'ici le numérateur se trouve toujours être d'un degré pair; pour trouver les intégrales analogues à numérateur de degré impair, il faudrait commencer par

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos x\,d\,x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x},$$

mais, quoiqu'on puisse en trouver la valeur par l'intégration indéfinie, cette valeur devient trop compliquée. Nous en resterons donc là, et nous tâcherons de déduire quelques nouveaux résultats des onze intégrales évaluées.

2. En premier lieu, nous les différentions par rapport à la constante p; nous aurons ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{4+p}^3}, \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x.\cos^2 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{4+p}^3}, \quad \ldots\ldots (13)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^4 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}; \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Puis

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{1}{p(4+p)}\left[-1+2\frac{2+p}{\sqrt{(4p+p)}}\, l\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4+p}+\sqrt{p}\right)\right], (p>0), \quad (15)$$

$$= \frac{1}{p(4+p)}\left[-1+\frac{2\,(2+p)}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], (0>p>-4), (15^a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x.\cos^4 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2p}\left\{\frac{1}{p}-\frac{2}{\sqrt{4+p}}-\frac{1}{\sqrt{4+p}^3}\right\}, \quad \ldots (16)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^6 x.\cos^2 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{2p}\left(-\frac{1}{p}+\frac{2}{p\sqrt{4+p}}+\frac{2+p}{2\sqrt{4+p}^3}\right), (17)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^6 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^5 x.\cos^3 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2p(4+p)}\left[-1+\frac{2\,(2+p)}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{4+p}+\sqrt{p}\right)\right], (p>0), \ldots (19)$$

$$= \frac{1}{2p(4+p)}\left[-1+\frac{2\,(2+p)}{\sqrt{-p(4+p)}}\, Arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], (0>p>-4), (19^a)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^3 x.\cos^5 x\, d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} \ldots\ldots\ldots (20)$$

3. Lorsqu'on multiplie les résultats du § 2 par p, et que l'on soustrait ces produits des intégrales correspondantes du § 1, chaque intégrale acquiert le facteur

$$\frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}-\frac{p\sin^2 x.\cos^2 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=\frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}\,; \quad (\alpha)$$

ainsi l'on trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=\frac{8+p}{2\sqrt{4+p}^3}\,\pi, \quad \ldots\ldots (21)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=\frac{8+p}{4\sqrt{4+p}^3}\,\pi, \quad \ldots\ldots (22)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}, \quad \ldots\ldots (23)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin x.\cos x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=\frac{1}{4+p}\left[1+\frac{4}{\sqrt{p(4+p}}\,l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\right],(p>0), \quad \ldots (24)$$

$$=\frac{1}{4+p}\left[1+\frac{4}{\sqrt{-p(4+p)}}\,Arc\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right],(0>p>-4), \quad \ldots (24a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2 x.\cos^2 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{4+p}^3}, \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=\frac{6+p}{4\sqrt{4+p}^3}\,\pi, \quad \ldots\ldots (25)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^4 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^3 x.\cos x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2(4+p)}\left[1+\frac{4}{\sqrt{p(4+p)}}\,l\{(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}\right],(p>0), \quad (27)$$

$$=\frac{1}{2(4+p)}\left[1+\frac{4}{\sqrt{-p(4+p)}}Arc\,sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right],(0>p>-4),\,.\,(27a)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{sin\,x.cos^3\,x\,d\,x}{(1+p\,sin^2\,x.cos^2\,x)^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(28)$$

4. La méthode des deux paragraphes précédents peut nous mener plus loin.

Nommons $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,d\,x}{(1+p\,sin^2\,x.cos^2x)^a}=I_a$, et considérons cette I_a comme fonction de la constante p, qui ne se trouve point dans la fonction F; on a, en la différentiant par rapport à cette constante p,

$$\frac{dI_a}{dp}=-\,a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,sin^2\,x.cos^2\,x\,d\,x}{(1+p\,sin^2\,x.cos^2\,x)^{a+1}}\,;$$

et l'on en déduit, tout comme au commencement du § 3, suivant la formule de réduction (α),

$$I_a+\frac{p}{a}\frac{d\,I_a}{dp}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,d\,x}{(1+p\,sin^2\,x.\,cos^2\,x)^{a+1}}=I_{a+1},$$

ou symboliquement

$$\left(1+\frac{p}{a}\frac{d}{dp}\right)I_a=I_{a+1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

Pour le cas le plus simple, celui de $a=1$, on a

$$I_2=\left(1+p\frac{d}{dp}\right)I_1,$$

précisément la méthode des paragraphes 2 et 3.

Généralement on trouve donc

$$I_a=\left(1+\frac{p}{a-1}\frac{d}{dp}\right)\left(1+\frac{p}{a-2}\frac{d}{dp}\right)..\left(1+\frac{p}{2}\frac{d}{dp}\right)\left(1+p\frac{d}{dp}\right)I_1\,;\,.\,(b)$$

de sorte que toujours I_a peut se déduire de I_1 conformément aux formules suivantes, où la valeur de l'intégrale I_a, comme fonction de p, sera désignée par $f(p)$, ou simplement par f:

$$I_2 = f + p\frac{df}{dp};$$

$$I_3 = \left(f + p\frac{df}{dp}\right) + \frac{p}{2}\left(2\frac{df}{dp} + p\frac{d^2f}{dp^2}\right) = f + 2p\frac{df}{dp} + \frac{1}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2};$$

$$I_4 = \left(f + 2p\frac{df}{dp} + \frac{1}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2}\right) + \frac{p}{3}\left(3\frac{df}{dp} + 3p\frac{d^2f}{dp^2} + \frac{1}{2}p^2\frac{d^3f}{dp^3}\right) =$$

$$= f + 3p\frac{df}{dp} + \frac{3}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2} + \frac{1}{2.3}p^3\frac{d^3f}{dp^3};$$

$$I_5 = \left(f + 3p\frac{df}{dp} + \frac{3}{2}p^2\frac{d^2f}{dp^2} + \frac{1}{2.3}p^3\frac{d^3f}{dp^3}\right) + \frac{p}{4}\left(4\frac{df}{dp} + 6p\frac{d^2f}{dp^2} + 2p^2\frac{d^3f}{dp^3} + \frac{1}{2.3}p^3\frac{d^4f}{dp^4}\right) =$$

$$= f + 4p\frac{df}{dp} + 3p^2\frac{d^2f}{dp^2} + \frac{2}{3}p^3\frac{d^3f}{dp^3} + \frac{1}{2.3.4}p^4\frac{d^4f}{dp^4}\Big);$$

$$I_6 = \left(f + 4p\frac{df}{dp} + 3p^2\frac{d^2f}{dp^2} + \frac{2}{3}p^3\frac{d^3f}{dp^3} + \frac{1}{2.3.4}p^4\frac{d^4f}{dp^4}\right) +$$

$$+ \frac{p}{5}\left(5\frac{df}{dp} + 10p\frac{d^2f}{dp^2} + 5p^2\frac{d^3f}{dp^3} + \frac{5}{6}p^3\frac{d^4f}{dp^4} + \frac{1}{2.3.4}p^4\frac{d^5f}{dp^5}\right) =$$

$$= f + 5p\frac{df}{dp} + 5p^2\frac{d^2f}{dp^2} + \frac{5}{3}p^3\frac{d^3f}{dp^3} + \frac{5}{2.3.4}p^4\frac{d^4f}{dp^4} + \frac{1}{2.3.4.5}p^5\frac{d^5f}{dp^5}.$$

Il semble que les coefficients de ces résultats successifs obéissent à la loi suivante pour I_{n+1}

$$1, \binom{n}{1}, \frac{1}{2}\binom{n}{2}, \frac{1}{2.3}\binom{n}{3}, \frac{1}{2.3.4}\binom{n}{4}, \frac{1}{2.3.4.5}\binom{n}{5};$$

donc, en général, $\frac{1}{1^{k/1}}\binom{n}{k}$, où $\binom{n}{k}$ est l'expression du coefficient $k^{ième}$ du binôme pour la puissance n. Par suite on pourrait encore les écrire de cette manière

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n^{2/-1}}{(1.2)^2}, \frac{n^{3/-1}}{(1.2.3)^2}, \frac{n^{4/-1}}{(1.2.3.4)^2}, \frac{n^{5/-1}}{(1.2.3.4.5)^2} \cdots \frac{n^{k/-1}}{(1^{k/1})^2}.$$

Pour juger de la validité de cette loi, supposons

$$\mathrm{I}_{a+1} = f + \frac{a}{1}\, p\, \frac{df}{dp} + \frac{a^{2/-1}}{(1.2)^2}\, p^2\, \frac{d^2 f}{d p^2} + \frac{a^{3/-1}}{(1.2.3)^2}\, p^3\, \frac{d^3 f}{d p^3} + \ldots$$

$$+ \frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2} p^2 \frac{d^k f}{dp^k} + \frac{a^{k+1/-1}}{(1^{k+1/1})^2}\, p^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a/1}} p^a \frac{d^a f}{dp^a}. \quad (c)$$

On en déduit d'abord

$$\frac{p}{a+1} \frac{d.\mathrm{I}_{a+1}}{dp} = \frac{p}{a+1} \Big[\frac{df}{dp} + \frac{a}{1} p \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{a^{2/-1}}{(1.2.)^2} p^2 \frac{d^3 f}{dp^3} + \ldots + \frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2} p^k \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} +$$

$$+ \ldots + \frac{a}{1} \frac{d f}{d p} + \frac{a^{2/-1}}{1.2}\, p\, \frac{d^2 f}{d p^2} + \frac{a^{3/-1}}{(1.2.)^2\, 3}\, p^2\, \frac{d^3 f}{d p^3} + \ldots.$$

$$+ \frac{a^{k+1/-1}}{(1^{k\ 1})^2\, (k+1)} p^k \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a\ 1}} p^a \frac{d^{a+1} f}{d p^{a+1}} \Big] =$$

$$= \frac{p}{a+1} \Big[\frac{a+1}{1} \frac{df}{dp} + \frac{a.a+1}{1.2} p \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{a^{2/-1}(a+1)}{(1.2)^2.3} p^2 \frac{d^3 f}{dp^3} \Big] + \ldots$$

$$+ \frac{a^{k/-1}(a+1)}{(1^{k/1})^2 (k+1)} p^k \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a/1}} p^a \frac{d^{a+1} f}{dp^{a+1}} \Big] =$$

$$= p \frac{d f}{dp} + \frac{a}{1.2} p^2 \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{a^{2/-1}}{(1.2)^2\, 3} p^3 \frac{d^3 f}{dp^3} + \ldots$$

$$+ \frac{a^{k/-1}}{(1^{k/1})^2 (k+1)} p^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a+1/1}} p^{a+1} \frac{d^{a+1} f}{dp^{a+1}};$$

puis, suivant la formule symbolique (a),

$$\mathrm{I}_{a+2} = \left(1 + \frac{p}{a+1} \frac{d}{d p}\right) \mathrm{I}_{a+1} =$$

$$= f + \frac{a+1}{1} p \frac{df}{dp} + \frac{a(a-1+2)}{(1.2)^2} p^2 \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{a^{2/-1}(a-2+3)}{(1.2.3)^2} p^3 \frac{d^3 f}{dp^3} + \ldots$$

$$+ \frac{a^{k/-1}(a-k+k+1)}{(1^{k+1/1})^2} p^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a+1/1}} p^{a+1} \frac{d^{a+1} f}{dp^{a+1}} =$$

$$= f + \frac{a+1}{1} p \frac{df}{dp} + \frac{(a+1)^{2/-1}}{(1.2)^2} p^2 \frac{d^2 f}{dp^2} + \frac{(a+1)^{3/-1}}{(1.2.3)^2} p^3 \frac{d^3 f}{dp^3} + \ldots$$

$$+ \frac{(a+1)^{k+1/-1}}{(1^{k+1/1})^2} p^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dp^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{1^{a+1/1}} p^{a+1} \frac{d^{a+1} f}{dp^{a+1}} =$$

$= \mathrm{I}_{a+2}$, d'après la supposition (c).

Il est donc prouvé que l'équation (c) exprime effectivement la loi des coefficients, qui étaient donnés déjà sous forme récurrente par l'équation (a), et sous forme symbolique par l'équation (b). Cette loi (c) peut s'écrire plus succinctement ainsi

$$I^{a+1} = \sum_{k=0}^{k=a} \frac{a^{k/1-1}}{(1^{k/1})^2} p^k \frac{d^k f}{dp^k} = \sum_{k=1}^{k=a} \binom{a}{k} \frac{1}{1^{k/1}} p^k \frac{d^k f}{dp^k} \quad . \; . \; (c_1)$$

Lorsqu'on voudra appliquer cette formule aux intégrales trouvées dans le § 1, il faudra se contenter des plus simples, parce qu'autrement les résultats seraient trop compliqués, et par suite peu utiles. Or, dans ces cas, il vaut mieux employer la formule symbolique (b), et y faire successivement les opérations indiquées de différentiation et d'addition, tout comme nous l'avions fait aux § 2 et 3.

Soit d'abord $f = \frac{1}{\sqrt{4+p}}$; alors (voir mon „*Overzicht van de Differentiaal-rekening*, 1865, pag. 33)

$$\frac{d^k f}{dp^k} = \frac{(-1)^k 1^{k/2}}{2^k (4+p)^{k+\frac{1}{2}}},$$

donc $\binom{a}{k} p^k \frac{d_k f}{dp^k} = (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k \frac{1}{\sqrt{4+p}}$;

ainsi l'intégrale (1) du § 1 donne

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2)^{a+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k \; . \; . \; (29)$$

On a ensuite

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k \; . \; . \; (30)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Pour la fonction

$$f_1 = \frac{\pi}{2p}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}}\right) = \frac{\pi}{2p} - \frac{\pi}{p\sqrt{4+p}},$$

on trouve, tant par la même méthode, que par le théorème de Leibnitz,

$$\frac{d^k}{dp^k} \cdot \frac{\pi}{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^k 1^{k/1}}{p^{k+1}},$$

et

$$\frac{d^k}{dp^k} \frac{1}{p\sqrt{4+p}}$$

$$= \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} \frac{d^l}{dp^l} \frac{1}{\sqrt{4+p}} \cdot \frac{d^{k-l}}{dp^{k-l}} \frac{1}{p} = \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^l 1^{l/2}}{2^l (4+p)^{l+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-1)^{k-l} 1^{k-l/1}}{p^{k-l+1}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{l=k} \frac{k^{l/-1}}{1^{l/1}} \frac{1^{k-l/1}}{2^l} (-1)^k 1^{l/2} \frac{1}{(4+p)^{l+\frac{1}{2}} p^{k-l+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^k 1^{k/1}}{p^{k-1}\sqrt{4+p}} \sum_{l=0}^{l=k} \frac{1^{l/2}}{1^{l/1}} \left(\frac{p}{2(4+p)}\right)^l;$$

par conséquent

$$\frac{d^k f_1}{dp^k} = \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^k 1^{k/1}}{p^{k+1}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}} \sum_{l=0}^{l=k} \frac{1^{l/2}}{1^{l/1}} \left(\frac{p}{2(4+p)}\right)^l\right],$$

et ensuite par l'intégrale (6) du § 1,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x . \cos^2 x \, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\pi}{2p} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}} \sum_{l=0}^{l=k} \frac{1^{l/2}}{1^{l/1}} \left(\frac{p}{2(4+p)}\right)^l\right] \cdot \cdot \quad (32)$$

On peut éviter les doubles sommations, qui se présentent ici, et trouver par conséquent l'intégrale sous une forme plus simple. A cet effet, changeons dans l'intégrale (29) a en $a-1$, et

différentions le résultat par rapport à la constante p. De cette manière on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \frac{-\pi}{a} \sum_{k=0}^{k=a-1} (-1)^k \binom{a-1}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \frac{d}{dp} \cdot \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Par différentiation logarithmique, il vient

$$\frac{d}{dp} \cdot \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}} \left\{ k \frac{1}{p} - (k+\tfrac{1}{2}) \frac{1}{p+4} \right\} =$$

$$= \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}} \frac{k(p+4)-(k+\frac{1}{2})p}{p(p+4)} = \frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+\frac{3}{2}}} (4k - \tfrac{1}{2}p);$$

de sorte qu'on a enfin

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} =$$

$$= \frac{\pi}{2a\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a-1} (-1)^{k+1} \binom{a-1}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} (8k-p) \frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+1}}, \quad (32^a)$$

résultat plus simple que le précédent (32).

De l'intégrale (30) séparons le terme de la sommation correspondant à la plus grande valeur de $k = a$, de sorte que la sommation restante ait de même les limites 0 et $a-1$; retranchons-en alors la dernière intégrale (32^a), on trouve pour la différence

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4 x\, dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2)^{a+1}} = (30)-(32^a) = \frac{\pi}{\sqrt{4+p}} \left[(-1)^a \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^a + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{k=a-1} (-1)^k \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k \left\{ \binom{a}{k} + \frac{1}{2a} \binom{a-1}{k} \frac{3k-p}{p(4+p)} \right\} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{4+p}} \left[(-1)^a \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^a + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{k=a-1} (-1)^k \binom{a-1}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k \left\{ \frac{a}{a-k} + \frac{8k-p}{2ap(4+p)} \right\} \right] = . \quad (33)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^4 x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

où, dans la réduction, on a fait usage de la propriété connue des coefficients du binôme,

$$\binom{a}{k}=\frac{a}{a-k}\binom{a-1}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

5. Lorsque la fonction $F(x)$ se présente, comme dans les paragraphes précédents, sous la forme d'un produit des mêmes puissances de $\sin x$ et de $\cos x$, c'est-à-dire comme $\sin^c x.\cos^c x$, on peut aussi faire usage, avec succès, de la méthode d'intégration par parties; elle nous donne

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^{c+2}x.\cos^{c+2}x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a-1}}=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^{c+1}x.\cos^{c+1}x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a-1}}\,\frac{d.\cos 2x}{d\,x}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\sin^{c+1}x.\cos^{c+1}x.\cos 2\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a-1}}\Bigg/_0^{\frac{1}{2}\pi}-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2\,x\,d\,x.\right.$$

$$\left.\left\{\frac{(c+1).\sin^c x.\cos^c x.\cos 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a-1}}-(a-1)\frac{\sin^{c+1}x.\cos^{c+1}x.p\sin 2x.\cos 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a}}\right\}\right]=$$

$$=0+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^c x.\cos^c x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a}}\cos^2 2x.\left[(c+1)(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)-\right.$$

$$\left.-(a-1)\,2\,p\sin^2 x.\cos^2 x\right];$$

aussi longtemps du moins que l'on a $c>-1$, de sorte que le terme intégré puisse s'évanouir pour les deux limites.

Or, dans l'intégrale au second membre, on trouve les facteurs

$$\cos^2 2\,x=1-4\sin^2 x.\cos^2 x \text{ et } (c+1)+(c-2a+3)p\sin^2 x.\cos^2 x;$$

ainsi l'on pourra ranger ces produits suivant les puissances de $(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)$, de telle sorte qu'il viendrait

$$\frac{1}{p}\Big[-4(c-2a+3)(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2+$$
$$+\{(c-2a+3)p+4(c-4a+5)\}(+p\sin^2 x.\cos^2 x)+2(a-1)(p+4)\Big].$$

D'un autre côté, dans l'intégrale au premier membre, on peut changer le facteur $\sin^2 x.\cos^2 x$ en

$$\frac{1}{p}\Big[(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)-1\Big].$$

Nommons maintenant l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^c x.\cos^c x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}=K_a,$$

où a seulement est paramètre variable, tandis que c reste constant; la réduction précédente deviendra

$$2(a-1)(p+4)K_a=-\{(c-2a+3)p+(c-4a+6)\}K_{a-1}+4(c-2a+4)K_{a-2}, \quad (d)$$

formule très-simple, mais qui n'admet pas les valeurs de $a=1$, ou de $p=-4$; au reste ce dernier cas est exclu ici partout, à raison de la condition du § 1, $p>-4$.

6. Passons à la méthode de l'intégration par rapport à la constante p, méthode dont il y a lieu d'attendre ici un bon résultat; en premier lieu nous aurons

$$\int_0^p dp\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)}{\sin^2 x.\cos^2 x}\int_0^p\frac{dl(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)}{dp},$$

et puis

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{F(x)\,dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\int_0^p dp\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}; \quad (e)$$

opération qui est permise avec nos valeurs de p, puisque généralement il fallait prendre $p>-4$, et que par conséquent les résultats trouvés valent sans aucun doute pour chaque p positif, hormis les cas spéciaux où la condition contraire est expressément posée.

Au moyen des intégrales évaluées au § 1, ce théorème nous fournit les suivantes

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\,(1 + p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \int_0^p \frac{\pi\, dp}{\sqrt{4+p}} = 2\pi\sqrt{4+p}\,\Big|_0^p = 2\pi\,(\sqrt{4+p} - 2), \quad . \quad (35)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^p \frac{\pi\, dp}{2\sqrt{4+p}} = \pi\,(\sqrt{4+p} - 2), \quad . \quad (36)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\,(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\,\frac{dx}{\sin^2 x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Dans l'intégrale (5) du § 1, d'après ce qui a été dit au commencement de ce §, nous n'avons à tenir compte que du cas où p est positif; il vient alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{dx}{\sin x.\cos x} = 2\int_0^p l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\right\}\frac{dp}{\sqrt{p(4+p)}}.$$

La substitution $\sqrt{4+p} + \sqrt{p} = 2v$ donne ici

$$4\,\frac{dv}{dp} = \frac{1}{\sqrt{4+p}} + \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2v}{\sqrt{p(4+p)}}, \text{ donc } \frac{dp}{\sqrt{p(4+p)}} = \frac{2\,dv}{v},$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\frac{dx}{\sin x.\cos x} = 2.\int_{p=0}^{p=p} l\,v\,\frac{2\,dv}{v} = 4\int_{p=0}^{p=p} l\,v.\,d.\,lv =$$

$$= 2\int_{p=0}^{p=p} d\,(l\,v)^2 = 2\left[l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\right\}\right]^2\Big|_0^p =$$

$$= 2\left\{\left[l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\right\}\right]^2 - 2\left(l\frac{2}{2}\right)^2\right\} = 2\left[l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\right\}\right]^2 \; . \; . \; . \; . \; (38)$$

On a ensuite

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)dx=\int_0^p \frac{\pi dp}{2p}\left(1-\frac{4}{\sqrt{4+p}}\right)=\pi\int_0^p \left\{\frac{1}{2}\frac{dlp}{dp}-\frac{1}{p\sqrt{4+p}}\right\}dp.$$

Afin d'intégrer le dernier terme du second membre, supposons $4+p=w^2$, donc $p=w^2-4$, $dp=2wdw$; par conséquent

$$\frac{dp}{p\sqrt{4+p}}=\frac{2wdw}{(w^2-4)w}=\frac{2dw}{w^2-4}=\frac{1}{2}dl\frac{w-2}{w+2}=\frac{1}{2}dl\frac{w^2-4}{(w+2)^2}=$$

$=\frac{1}{2}dl\frac{p}{(\sqrt{4+p}+2)^2}$; de sorte qu'on obtient l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)dx=\pi\int_0^p dp\left[\frac{1}{2}dlp-\frac{1}{2}dl\frac{p}{(\sqrt{4+p}+2)^2}\right]=$$

$$=\pi\int_0^p +\frac{1}{2}dp\frac{d}{dp}l(\sqrt{4+p}+2)^2=\pi\, l(\sqrt{4+p}+2)\Big|_0^p=$$

$$=\pi\{l(\sqrt{4+p}+2)-l4\}=\pi\, l\{\tfrac{1}{4}(\sqrt{4+p}+2)\}\ \ldots\ (39)$$

De ces résultats on déduit facilement

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x).tg^2 x\,dx=(36)-(39)=$$

$$\pi\{\sqrt{4+p}-2+2\,l2-l(\sqrt{4+p}+2)\},\ \ldots\ldots\ (40)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x).\cot^2 x\,dx,\ \ldots\ (41)$$

puis encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)tg\,x\,dx=2[l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}]^2,\ .\ (42)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\cot x\,dx\ \ldots\ (43)$$

La formule (10) § 1 ne nous donne rien de nouveau, comme il est facile de s'en assurer.

7. Pour les intégrales au dénominateur $(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2$, on a généralement, à l'aide de cette méthode,

$$\int dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(x)\,dx \; \frac{-1}{\sin^2 x.\cos^2 x} \int dp \; \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\right),$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)}{(1+p^2\sin^2 x.\cos^2)} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} = -\int dp \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} + C.(f)$$

C'est intentionnellement que l'on n'a pas introduit ici l'intégration entre les limites 0 et p, parce qu'alors l'intégrale par rapport à p, $\int dp.\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}\right)$, nous aurait donné $\left(\frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x}-1\right)$, et qu'ainsi l'on ne se trouverait pas conduit à des intégrales nouvelles. Au contraire, il faut tâcher de déterminer, dans chaque cas en particulier, la constante C de l'intégration. En traitant, même avec cette précaution, les intégrales du § 2, on se trouve ramené à celles du § 1. Mais on obtient de nouveaux résultats à l'aide des intégrales du § 3.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\int \frac{8+p}{\sqrt{4+p}}\,dp =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int\left[\frac{4}{\sqrt{4+p}} + \sqrt{4+p}\right]dp = -\frac{\pi}{2}\left[8\sqrt{4+p} + \frac{2}{3}\sqrt{4+p}^{\,3}\right] + C.$$

Comme l'intégrale au premier membre disparaît pour $p=0$, il vient $C = \frac{\pi}{2}(8.2 + {}^2/_3.8) = \frac{32}{3}\pi$, de sorte qu'on obtient l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{\pi}{3}\left[32-12\sqrt{4+p}-\sqrt{4+p}^3\right] \ldots (44)$$

Puis

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{6}\pi\left[32-12\sqrt{4+p}-\sqrt{4+p}^3\right], \ldots (45)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x}, \ldots\ldots\ldots (46)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{dx}{\sin x.\cos x} = -\int \frac{dp}{4+p}\left[1+\frac{4}{\sqrt{p(4+p}}\, l\, \frac{\sqrt{4+p}+\sqrt{p}}{2}\right];$$

Supposons, tout comme au § 6, $\sqrt{4+p} + \sqrt{p} = 2v$, d'où $\frac{1}{2v} = \frac{\sqrt{4+p}-\sqrt{p}}{4}$ et $\sqrt{4+p} - \sqrt{p} = \frac{2}{v}$, par suite aussi $\sqrt{4+p} = v + \frac{1}{v}$ et $\sqrt{p} = v - \frac{1}{v}$; l'intégrale au second membre deviendra

$$= -\int \frac{dp}{4+p} - \int 4.\frac{2\,dv}{v} \frac{1}{\left(v+\frac{1}{v}\right)^2} l\, v.$$

Mais la seconde intégrale, par la supposition $v^2 = z$, devient

$$\int \frac{8\,v\,dv}{(1+v^2)^2}\, l\, v = 2\int \frac{dz}{(1+z)^2}\, l\, z = 2\left[-\frac{1}{1+z} l\, z + \int \frac{dz}{z}\frac{1}{1+z}\right] =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{1+z} lz + \int dz\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{1+z}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{1+z} lz + lz - l(1+z)\right] =$$

$$= 2\left[\frac{z}{1+z} lz - l(1+z)\right] = 2\left[\frac{2v^2}{1+v^2} lv - l(1+v^2)\right] = 2\left[-l\frac{1+v^2}{v} + \frac{v^2-1}{v^2+1}\, l\, v\right] =$$

$$= -l(4+p) + 2\sqrt{\frac{p}{4+p}}\,.\, l\{\tfrac{1}{2}\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\}.$$

Par conséquent, le second membre de la formule précédente devient $-2\sqrt{\frac{p}{4+p}}.l\{\frac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}+C.$

Or, comme l'intégrale au premier membre s'évanouit pour $p=0$, on a aussi $C=0$, et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{1+p\sin^2x.\cos^2x}\frac{dx}{\sin x.\cos x}=-2\sqrt{\frac{p}{4+p}}.l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\}..(47)$$

L'application du théorème (f) aux intégrales suivantes du § 3 ne nous donnerait rien d'autre que les intégrales primitives du § 1.

8. Passons aux intégrales du § 4; alors, d'après la même méthode, on a plus généralement

$$\int dp\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^{a+1}}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}F(x)dx\,\frac{-1}{a\sin^2x.\cos^2x}\frac{1}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^a},$$

donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)}{(1+p\sin^2x.\cos x^2)^a}\frac{dx}{\cos^2x.\sin^2x}=-a\int dp\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^{a+1}}+C,.(g)$$

où, tout comme au paragraphe précédent, on en est resté à l'intégration indéfinie par rapport à la constante p. Il faut donc tâcher encore de déterminer séparément la valeur de la constante C de l'intégration. Nous en viendrons aisément à bout en prenant $p=0$, parce que pour cette valeur les intégrales au premier membre s'évanouissent toujours. De cette manière, l'intégrale (29) du § 4 donnera ici

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{(1+p\sin^2x.\cos^2x)^a}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}=-a\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\binom{a}{k}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\int\frac{p^k}{(p+4)^{k+1}}dp.$$

Afin de déterminer cette dernière intégrale, supposons $p+4=\frac{4}{y}$, d'où $p=4\left(\frac{1}{y}-1\right)$, $dp=\frac{-4dy}{y^2}$, $\frac{p}{4+p}=y\left(\frac{1}{y}-1\right)=1-y$;

l'intégrale au second membre de l'équation précédente deviendra par suite,

$$\int \frac{p^k}{(p+4)^{k+\frac{1}{2}}} dp = \int (1-y)^k \frac{\sqrt{y}}{2} \frac{-4\,dy}{y^2} = -2\int (1-y)^k \frac{dy}{\sqrt{y^3}} =$$

$$= -2\int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \sum_{l=0}^{l=k} \binom{k}{l} (-y)^l = 2\sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \int y^{l-\frac{3}{2}} dy = 2\sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{1}{l-\frac{1}{2}} y^{l-\frac{1}{2}}$$

$$= 4\sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{1}{2l-1} \left(\frac{4}{p+4}\right)^{l-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-k} \binom{k}{l} \frac{2^{2l+1}}{2l-1} \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}},$$

et la valeur de notre intégrale devient

$$= -a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l+1}}{2l-1} \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}} + C.$$

Pour $p = 0$, l'intégrale au premier membre s'évanouit, et au second membre, il n'y a que le facteur $\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}$, de la seconde sommation par rapport à l, qui se change en $\frac{1}{4^{l-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{2l-1}}$;

On a donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l+1}}{2l-1} \left\{ \frac{1}{2^{2l-1}} - \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (48)$$

d'où il suit encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= a\pi \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{k}{l} \frac{2^{2l}}{2l-1} \left\{ \frac{1}{2^{2l-1}} - \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (49)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)_a} \frac{dx}{\sin^2 x} \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

Changeons maintenant, dans l'intégrale (30), a en $a+1$; séparons le terme le plus élevé de la sommation pour $k=a+1$; et soustrayons la valeur de l'intégrale (29) du § 4. On trouve ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{tg^2 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\,dx =$$

$$=(-1)^{a+1}(a+1)\pi\frac{1^{a+1/2}}{2^{a+1/2}}\sum_{l=0}^{l=a}(-1)^{l-1}\binom{a}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left\{\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\left[(a+1)\binom{a+1}{k}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^{l-1}\binom{k}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left(\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right)-\frac{1}{\sqrt{p+4}}\binom{a}{k}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k\right],$$

ou, comme on a d'après la loi des coefficients du binôme

$$\binom{a+1}{k}=\frac{a+1}{a-k+1}\binom{a}{k},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{tg^2 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\,dx =$$

$$=(-1)^{a+1}(a+1)\pi\frac{1^{a+1/2}}{2^{a+1/2}}\sum_{l=0}^{l=a}(-1)^{l-1}\binom{a}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left\{\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\pi\sum_{k=0}^{k=a}(-1)^{k-1}\frac{1^{k/2}}{2^{k/2}}\binom{a}{k}\left[\frac{1}{\sqrt{p+4}}\left(\frac{p}{p+4}\right)^k+\right.$$

$$\left.+\frac{(a+1)}{a-k+1}\sum_{l=0}^{l=k}(-1)^l\binom{k}{l}\frac{2^{2l}}{2l-1}\left(\frac{1}{2^{2l-1}}-\frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right)\right], \quad (51)$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cot^2 x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

9. Les intégrales précédentes, par leur constitution, se prêtent toutes, ou du moins en grande partie, à l'application de deux théorèmes qui en changent le caractère, en tant qu'ils introduisent le facteur x, soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur.

La première de ces réductions s'obtient par la substitution de $x = \frac{1}{2}\pi - y$; on trouve ainsi généralement

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,\mathrm{F}(x)\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\frac{1}{2}\pi - x)\,\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x},$$

d'où simplement

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x)}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x}\, x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x)\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Or, on peut faire usage de ce théorème pour les intégrales précédentes, chaque fois que la valeur de l'intégrale du second membre est connue: ce qui naturellement est indispensable. Mais cette application est surtout utile quand on a, comme c'est en général le cas pour nos intégrales, $\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x) = \mathrm{F}(x)$, d'où $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x) = 2\,\mathrm{F}(x)$. Par cette voie, les intégrales du § 1 nous donnent les suivantes

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{4+p}}. \quad (53)$$

Quant à l'intégrale (2) du § 1, on a $\mathrm{F}(x) + (\frac{1}{2}\pi - x) = 0$, ce qui ne fournit rien. Pour l'intégrale (3) du même paragraphe on a $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, et l'on se trouve ramené au résultat précédent; il en est de même pour l'intégrale (4). Mais l'intégrale (5) et les suivantes, au contraire, nous donnent

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\sin x.\cos x\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x.\cos x\,dx}{1 + p\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{p(4+p)}}\, l\,\{(\sqrt{4+p} + \sqrt{p}\},\ (p > 0), \quad \ldots (54)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{-p(4+p)}} Arc\ sin\ (\tfrac{1}{2}\sqrt{-p}),\ (0 > p > -4), \ldots\ldots (54^a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, sin^2 x . cos^2 x dx}{1+p sin^2 x . cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x . cos^2 x\, d x}{1+p sin^2 x . cos^2 x} = \frac{\pi^2}{8p}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{4+p}}\right). (55)$$

Les intégrales (7) et (8) du § 1 se trouvent être dans le même cas que les précédentes (3) et (4); elles acquerraient au numérateur le facteur $sin^4 x + cos^4 x = 1 - 2 sin^2 x . cos^2 x$, et donneraient donc une intégrale composée de (53) et (55). Pour l'intégrale (11) du § 1, on aurait au numérateur un facteur zéro; donc on n'en déduirait rien. Enfin les intégrales (10) et (11) du même paragraphe donneraient au numérateur un facteur $sin^3 x . cos x + cos^3 x . sin x = sin x . cos x\, (sin^2 x + cos^2 x) = sin x . cos x$; de sorte qu'on se trouverait ramené à l'intégrale (54).

10. On a encore la formule, plus générale que celle du § 9,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x)}{(1+p sin^2 x . cos^2 x)^a}\, x\, d x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, d x}{(1+p sin^2 x . cos^2 x)^a} \ldots (i)$$

Au moyen de cette transformation, les intégrales du § 2 donnent, pour $a = 2$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, sin^2 x . cos^2 x\, d x}{(1+p sin^2 x . cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^2 x . cos^2 x\, d x}{(1+p sin^2 x . cos^2 x)^2} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{4+p}^3}, (56)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, sin^3 x . cos^3 x\, d x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin^3 x . cos^3 x\, d x}{(1 + p\, sin^2 x . cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4p(4+p)}\left[-1 + \frac{2(2+p)}{\sqrt{p(4+p)}}\, l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\}\right], (p > 0), . (57)$$

$$= \frac{\pi}{4p(4+p)}\left[-1 + \frac{2(2+p)}{\sqrt{-4(4+p)}}\, Arc\ sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], 0 > p > -4), (57^a)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \sin^4 x \,.\, \cos^4 x \, d x}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^4 x \,.\, \cos^4 x \, d x}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8p}\left[\frac{1}{p} - \frac{2}{p\sqrt{4+p}} - \frac{1}{\sqrt{4+p}^3}\right]; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

tandis que les autres intégrales du même paragraphe ne fournissent, soit rien de nouveau, soit rien du tout.

11. De la même manière, aux intégrales du § 3 on peut faire subir la réduction du théorème (i) pour $a = 2$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \, d x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{8}\pi^2 \frac{8+p}{\sqrt{4+p}^3}, \quad (59)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x \sin x \,.\, \cos x \, d x}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \,.\, \cos x \, d x}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4(4+p)}\left[1 + \frac{4}{\sqrt{p(4+p)}} l\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p} + \sqrt{p})\}\right], (p > 0), \quad (60)$$

$$= \frac{\pi}{4(4+p)}\left[1 + \frac{4}{\sqrt{-p(4+p)}} Arc\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{-p})\right], 0 > p > -4). \quad (60^a)$$

12. Les considérations que l'on trouve au § 4 peuvent également trouver quelquefois leur application à ces résultats.

Lorsque $F(x) = \sin^{b-c}x.\cos^{b-c}x$, il s'ensuit $F(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin^{b-c}x.\cos^{b+c}x$, et par conséquent $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin^{b-c}x.\cos^{b-c}x\,(\sin^{2c}x + \cos^{2c}x)$; ici le facteur $\sin^{2c}x + \cos^{2c}x$ peut être simplifié, puisqu'on a $(\sin^2 x + \cos^2 x)^c = 1$; cette réduction ramène nos intégrales à des expressions plus simples.

Lorsque $F(x) = \sin^c x \,.\, \cos^c x$, on a $F(\frac{1}{2}\pi - x) = F(x)$, et par suite $F(x) + F(\frac{1}{2}\pi - x) = 2F(x)$; en ce cas l'application des formules du § 4 peut se faire avec succès.

Le théorème (c) donne alors, quand $I_1 = f(p)$ est connu,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x F(x) \, d x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x) \, d x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi I_{a+1} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} \frac{1}{1^{k/1}} p^k \frac{d^k f}{dp^k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

On peut aussi appliquer le théorème (*i*) à quelques-unes des intégrales générales du § 4, dont la valeur à été évaluée à cet endroit,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \left(\frac{p}{p+4}\right)^k, \quad \ldots\ldots (61)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\sin^2 x.\cos^2 x\,d\,x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 x.\cos^2 x\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8\,a\sqrt{4+p}} \sum_{k=0}^{k=a-1} (-1)^{k-1} \binom{a-1}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} (8\,k-p) \frac{p^{k-1}}{(p+4)^{k+1}} \quad ..(62)$$

13. Enfin, on trouve au moyen des deux intégrales (44) et (47) du § 7, les seules qu'on puisse employer ici avec quelque succès,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{d\,x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{d\,x}{\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{12}\pi^2 \left[32 - 12\sqrt{4+p} - \sqrt{4+p}^{\,3}\right], \quad \ldots\ldots\ldots (63)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{d\,x}{\sin x.\cos x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+p\sin^2 x.\cos^2 x} \frac{d\,x}{\sin x.\cos x} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p}{4+p}}\; l\left\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{4+p}+\sqrt{p})\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

De la même manière, on a par l'intégrale (48) du § 8

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} \frac{d\,x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x} =$$

$$= \tfrac{1}{2}a\pi^2 \sum_{k=0}^{k=a} (-1)^k \binom{a}{k} \frac{1^{k/2}}{2^{k/2}} \sum_{l=0}^{l=k} (-1)^{l-1} \binom{l}{k} \frac{2^{2l+1}}{2l-1} \left(\frac{1}{2^{2l-1}} - \frac{1}{(p+4)^{l-\frac{1}{2}}}\right). \quad (65)$$

14. Tâchons maintenant d'appliquer la méthode des paragraphes (9) et (10 au cas où l'intégrale possède le facteur x^2. Par la même voie et par la même substitution, on obtient ici, dans le cas le plus général, celui où le dénominateur renferme la puissance $a^{ième}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2\, F(\frac{1}{2}\pi - x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\frac{1}{2}\pi - x)^2\, F(x)\, dz}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^a} - \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^a} +$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2\, F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

Comme on l'a vu aux § 9 et 10, la seconde intégrale du second membre aura seulement une valeur définie tant que $F(\frac{1}{2}\pi - x) = F(x)$; mais alors aussi les deux premières intégrales du second membre se détruisent: l'intégrale qui reste encore au second membre est égale à l'intégrale du premier membre; c'est-à-dire, que l'équation devient identique et ne donne lieu à aucune évaluation.

Pour les intégrales à facteur x^3, au contraire, on a, toujours par la même voie,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^3\, F(\frac{1}{2}\pi - x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\frac{1}{2}\pi - x)^3\, F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x)^a} =$$

$$= \frac{1}{8}\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^a} - \frac{3}{4}\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\, F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^a} +$$

$$+ \frac{3}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2\, F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^a} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^3\, F(x)\, dx}{(1 + p \sin^2 x . \cos^2 x)^a},$$

quand on fait usage de la réduction du § 10: la supposition $F(x) = (\frac{1}{2}\pi - x)$, qui valait alors, nous donne donc ici

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^3\,\mathrm{F}(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} = -\frac{1}{32}\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{F}'(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} +$$

$$+\frac{3}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x^2\,\mathrm{F}(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

Mais puisque la dernière intégrale du second membre ne pouvait être évaluée, d'après ce que nous venons de voir, cette évaluation est également impossible pour l'intégrale du premier membre de (m). On peut seulement déduire de (m) la formule de réduction, peu utile,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(3\pi-4x)}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} x^2\mathrm{F}(x)dx = \frac{1}{8}\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{F}(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} \ldots (n)$$

En recourant, toutefois, à la méthode d'intégration par parties, on peut trouver aussi

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\,\mathrm{F}(x)\,dx}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a} = \left.\frac{x^2\,\mathrm{F}(x)}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^a}\right|_0^{\frac{1}{2}\pi} -$$

$$-\int^{\frac{1}{2}\pi} x^2\,dx \frac{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)\,\mathrm{F}(x) - a\,\mathrm{F}(x)\,p\sin 2x.\cos 2x}{(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)^{a+1}}.$$

En premier lieu, le terme intégré s'évanouit pour la limite inférieure $x=0$, à cause du facteur x^2; pour la limite supérieure il devient $\frac{1}{4}\pi^2\,\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi)$. Mais comme ici il faut de nouveau qu'on ait $\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi - x) = \mathrm{F}(x)$, il s'ensuit $\mathrm{F}(\frac{1}{2}\pi) = \mathrm{F}(0)$: de sorte que l'expression précédente devient $\frac{1}{4}\pi^2\,\mathrm{F}(0)$. Or, celle-ci s'annule pour nos intégrales, et par conséquent le terme intégré s'évanouit.

Ensuite, pour les intégrales des § 9, 10, 11 et 12, on a toujours $\mathrm{F}(x) = \sin^c x.\cos^c x$, donc $\mathrm{F}'(x) = c\sin^{c-1} x.\cos^{c-1} x.\cos 2x$, et ainsi le numérateur de l'intégrale au second membre devient

$$\sin^{c-1} x.\cos^{c-1} x.\cos 2x\,\{c(1+p\sin^2 x.\cos^2 x) - 2ap\sin^2 x.\cos^2 x\} =$$

$$= \sin^{c-1} x.\cos^{c-1} x.\cos 2x\,\{c+(c-2a)\,p\sin^2 x.\cos^2 x\} = . (\delta)$$

$$= \sin^{c-1} x.\cos^{c-1} x.\cos 2x\,[2a+(c-2a)(1+p\sin^2 x.\cos^2 x)] \ldots (\varepsilon)$$

Au moyen de cette dernière réduction, on trouve

$$2a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^2 sin^{c-1}x.cos^{c-1}x.cos2xdx}{(1+p\,sin^2x.cos^2x)^a}+(c-2a)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^2 sin^{c-1}x.cos^{c-1}xdx}{(1+psin^2x.cosx)^{a-1}}=$$

$$=-2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x\,F(x)\,dx}{(1+psin^2x.cos^2x)^a}=-\tfrac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{(1+p\,sin^2x.cos^2)^a},\ . \quad (o)$$

formule de réduction entre deux intégrales correspondantes, où le paramètre variable se trouve être la puissance au dénominateur.

A l'aide de l'avant-dernière réduction (δ) on obtient, de la même manière,

$$(2a-c)p\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^2 sin^{c+1}x.cos^{c+1}x.cos2xdx}{(1+p\,sin^2\,x.cos^2\,x)^a}-c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x^2 sin^{c-1}x.cos^{c-1}x.cos2xdx}{(1+p\,sin^2\,x.cos^2x)^a}=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x\,F(x)\,dx}{(1+p\,sin^2x.cos^2x)^a}=\tfrac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{F(x)\,dx}{(1+p\,sin^2x.cos^2x)^a},\ . \quad (d)$$

c'est-à-dire, encore une formule de réduction entre deux intégrales correspondantes, mais où maintenant c'est la puissance au numérateur qui est devenue le paramètre variable.

Ni l'une ni l'autre de ces deux réductions ne mène, toutefois, à un résultat utile.

15. Mais la marche du § 9 peut aussi être suivie pour quelques intégrales du § 6, à savoir pour 35, 38 et 39; car la substitution $x=\frac{1}{2}\pi-y$ nous donne ici, tout comme dans le paragraphe cité,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}x\,l\,(1+p\,sin^2\,x\,.\,cos^2\,x)\,sin^c\,x\,.\,cos^c\,.\,x\,d\,x=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\tfrac{1}{2}\pi-x)\,l\,(1+p\,sin^2\,x\,.\,cos^2\,x)\,sin^c\,x\,.\,cos^c\,x\,d\,x,$$

et par suite, de nouveau,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\, l\,(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x) \sin^c x \,.\, \cos^c x \, d\, x =$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\,(1 + p \sin^2 x \,.\, \cos^2 x) \sin^c x \,.\, \cos^c x \, d\, x \,; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (q)$$

formule qui nous fournit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p \sin^2 x.\cos^2 x) \frac{x\, d\, x}{\sin^2 x.\cos x^2} = \tfrac{1}{2}\pi^2 (\sqrt{4+p}-2), \quad . \; . \quad (66)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p \sin^2 x.\cos^2 x) \frac{x\, d\, x}{\sin x.\cos x} = \pi \left[l \left\{ \tfrac{1}{2} (\sqrt{4+p} + \sqrt{p}) \right\} \right]^2, \; . \; (67)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l(1+p \sin^2 x.\cos^2 x) \quad x\, d\, x \quad = \tfrac{1}{4}\pi^2 l \left\{ \tfrac{1}{4} (\sqrt{4+p} + 2) \right\} \quad . \; . \quad (68)$$

16. D'après la remarque du § 9, on peut maintenant appliquer quelques théorèmes qui, cette fois-ci, ont le facteur x au dénominateur. Dans l' „*Exposé de la théorie des propriétés des intégrales définies*", Partie II, chapitre II, N°. 14 (voir „*Verhandelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen*, Afdeeling Natuurkunde, tome VIII, p. 99 et 100), on trouve la déduction de ces trois théorèmes, qui pourront rendre ici de bons services

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{F}\,(\sin^2 x) d\, x = \int_0^{\infty} \mathrm{F}\,(\sin^2 x) \frac{\sin x\, d\, x}{x} = \int_0^{\infty} \mathrm{F}(\sin^2 x) \frac{\tan g\, x\, d\, x}{x} =$$

$$= \int_0^{\infty} \mathrm{F}\,(\sin^2 x) \frac{\tan g\, \frac{1}{2} x\, d\, x}{x} \,.$$

On peut donc employer ces trois théorèmes partout où la condition nécessaire, que la fonction à intégrer soit paire, se trouve remplie; dans le dernier théorème, on prendra $x = 2y$, pour éviter les fractions.

Pour ne pas trop allonger cette notice, nous en resterons-là; le lecteur pourra aisément s'assurer des résultats, qui d'ailleurs se trouvent à la fin d'un Mémoire inséré dans les *Verslagen en Mededeelingen*, T. XII, p. 320—370.

SUR L'ORIGINE

DES

DUNES MARITIMES DES PAYS-BAS,

PAR

T. C. WINKLER.

(*présenté au congrès géologique international, Paris*, 1878).

Le littoral occidental des Pays-Bas, depuis le Cadzand dans la Flandre zélandaise jusqu'aux petites îles qui se trouvent au nord du golfe le Dollart, est recouvert le long de la plage d'une chaîne de collines de sable mouvant, que l'on appelle les *dunes*. On sait que ces dunes maritimes de notre pays ne sont qu'un chaînon dans la grande chaîne de collines de sable qui s'étend de Calais en France, le long du littoral de la Belgique, de la Néerlande, du Danemarck, jusqu'au bras de mer le Skagerrak. Quoique cette chaîne de collines ne soit interrompue que par quelques détroits ou bras de mer assez étroits, ses différentes parties ne sont point du tout identiques: il suffit de lire les descriptions des dunes des pays que je viens de nommer, dans les ouvrages de Brémontier, de d'Omalius d'Halloy, de Dewalque, de Staring, de Forchhammer, d'Andresen et de tant d'autres savants, pour apercevoir que des circonstances locales ont joué un très grand rôle dans l'origine et la formation de ces dépôts arénacés, si intéressants pour le géologue. C'est uniquement à ce point de vue que je me propose de considérer ici les dunes maritimes des Pays-Bas; la disposition de ces monticules de sable

est assez généralement connue pour qu'il soit superflu d'entrer à cet égard dans des détails descriptifs.

Quelle est l'origine de nos dunes? Avant de répondre à cette question, je rappellerai en peu de mots comment se forment les dunes actuelles, pour montrer que, à proprement parler, nos dunes ne sont que des bancs de sable très hauts, jetés sur la plage.

Tous les géologues qui ont observé les phénomènes du bord de la mer du Nord dans les Pays-Bas, sont d'accord que l'on doit attribuer la formation de collines de sable sur la plage à l'action combinée des eaux de la mer et des vents. L'eau de la mer étant continuellement en mouvement par l'influence de courants marins, du flux et du reflux, des vents qui agitent sa surface, etc., tient toujours en suspension une partie du sable qui forme le lit de la mer et les bancs qui s'étendent le long de la plage. Les vagues et la marée poussent ces matières suspendues vers la côte et les déposent sur la plage. Une partie de ce sable se dessèche lors du reflux ou du refoulement des eaux, et, séchée, est entraînée vers l'intérieur des terres, chaque fois que le vent souffle dans une direction qui peut favoriser ce transport. Voilà comment se forment sur la plage des collines de sable, qui atteignent parfois une altitude de vingt, de trente, de soixante mètres. La formation des dunes exige donc non-seulement l'existence d'une plage sableuse, mais aussi une position de la côte telle, que celle-ci soit dans le cas d'être battue par des vents dont la direction dominante pousse les vagues de la mer et les flots de la marée vers l'intérieur des terres. Les mêmes conditions sont nécessaires pour la formation des bancs de sable, d'une forme allongée et placés à peu de distance du rivage, qui se trouvent partout dans la mer du Nord, aux endroits où le fond est sableux. Voilà pourquoi l'on peut soutenir que les dunes maritimes ne sont que des bancs de sable jetés sur la plage et soustraits à l'action des eaux tant que celles-ci ne dépassent pas le niveau ordinaire.

Demandons-nous maintenant: d'où provient le sable de nos bancs dans la mer et de nos dunes sur la côte? Pour faciliter

la réponse à cette question, je mets sous les yeux du lecteur une carte plus ou moins théorique ou idéale des dépôts diluviens qui font partie du sol des Pays-Bas. Sur cette carte, les parties coloriées en pourpre représentent: 1° les roches tertiaires des environs de Bentheim en Munsterland, qui dépassent en deux endroits la frontière orientale de notre pays, savoir dans la Gueldre et dans l'Overyssel, et 2° les terrains crétacés des environs de Maestricht. Les autres couleurs représentent les surfaces où le sol est composé de dépôts diluviens, dont l'explication se trouve au bas de la carte.

Les parties non coloriées sont celles où s'étendent aujourd'hui les dépôts d'origine moderne ou l'alluvium. Je n'ai pas donné de teinte à cette partie de notre pays, parce que je ne m'occuperai que du diluvium. La carte nous montre donc l'état de la Néerlande à l'époque diluvienne: à cette époque les parties du sol laissées en blanc n'existaient pas encore, leur emplacement futur était recouvert par les eaux de la mer, qui baignait au midi les côtes de la Belgique tertiaire, à l'orient celles de la Westphalie et du Hanovre. Arrêtons-nous d'abord quelques instants sur l'origine du diluvium néerlandais, et donnons un court aperçu de ces dépôts, nécessaire pour faire connaître l'origine de nos dunes maritimes.

Une étude approfondie du diluvium néerlandais, étude faite surtout par l'éminent géologue dont nous regrettons la perte récente, feu le Dr. Staring, nous apprend que les différents dépôts de cette formation n'ont pas tous la même origine, c'est-à-dire qu'ils ne proviennent pas d'un seul endroit, et qu'il y a une différence marquée dans les matières qui les composent. C'est pourquoi Staring a donné des noms différents aux parties principales de notre diluvium, noms qui ont particulièrement rapport aux contrées d'où sont originaires les matières qui forment actuellement à peu près la moitié de la surface des Pays-Bas. On distingue

1	le diluvium	septentrional,	=	le diluvium	scandinavien de	Staring.
2	" "	oriental,	=	" "	du Rhin	"
3	" "	méridional,	=	" "	de la Meuse	"
4	" "	entremêlé,	=	" "	entremêlé	"
5	" "	remanié,	=	" "	sableux (zand-diluvium)	"

On remarquera qu'on peut faire indifféremment usage soit des dénominations que je propose, soit de celles de Staring, pour les quatre premiers dépôts, mais que j'ai considéré sous un autre point de vue le dépôt désigné sous le N°. 5. Nous reviendrons sur ce changement dans la terminologie, en traitant plus loin de cette section du diluvium.

La période tertiaire était passée; la température élevée qui régnait dans le nord de l'Europe pendant cette période s'était considérablement abaissée; la période glaciaire commençait. Des glaciers énormes recouvraient non-seulement les environs du pôle nord, mais même des pays plus méridionaux, comme la Norwège, la Suède, l'île de Gothland. La température de l'air était alors dans ces pays semblable à celle des hautes latitudes de nos jours. Les glaciers y atteignaient les bords de la mer, des masses s'en détachaient et devenaient des glaces flottantes. Celles-ci transportaient à leur surface des blocs de pierre et d'autres débris, éboulés des rochers qui bordaient les glaciers. Par l'influence de courants marins, ces glaçons arrivaient dans la mer aux lieux où nous voyons actuellement les plaines de l'Allemagne du Nord, du Hanovre, de Groningue, de la Frise, de Drenthe. Là, la température de l'air étant plus élevée, ces glaçons se fondaient, et les débris et les blocs de pierre, qui avaient été transportés par eux comme sur des radeaux, tombaient dans la mer et recouvraient le fond de l'océan, de même qu'aujourd'hui les glaçons du Groenland portent des pierres et du sable vers les bancs de Terre-Neuve. De cette manière sont arrivés les masses de sable, d'argile, de gravier, les grands blocs erratiques, les fossiles, qui forment à présent dans notre pays la partie méridionale de la province de Groningue, l'est et le sud-est de la Frise, la province de Drenthe, le nord de l'Overyssel, la pointe occidentale de la Frise, les îles Schokland, Urk et Wieringen dans le Zuiderzée, le noyau des îles qui sont séparées du continent par les Wadden,

etc. Ces masses sont disposées dans la province de Groningue de manière à former une chaîne de collines basses, dont la direction générale, semblable à celle des collines du nord de l'Allemagne, va du nord-est au sud-ouest. Une de ces collines, le Hondsrug en Drenthe, contient de nombreux fossiles, des calamopores, des stromatopores, des cyathophyllum, des brachiopodes, qui, d'après les recherches des paléontologistes, entre autres de M. Roemer de Breslau, se retrouvent dans les roches siluriennes et dévoniennes de la Suède, surtout de l'île de Gothland dans la mer Baltique. Quelques-uns de ces fossiles, par exemple les caténipores, sont si tendres, si friables, que la moindre secousse les réduit en poudre. Ils démontrent clairement qu'ils n'ont pas été transportés par des courants ou des fleuves, en compagnie de pierres et de blocs de roche qui sans doute les auraient pulvérisés; au contraire, ils sont arrivés ici sans rouler, sans frotter contre d'autres corps, au moyen de glaces flottantes servant de radeaux. Le sable de ces dépôts est un sable quartzeux dont plusieurs grains ne sont ni arrondis ni émoussés sur les bords et les angles, ce qui dénote qu'ils n'ont pas été charriés par les eaux. Dans ces dépôts de sable sont disséminés des cailloux et des fragments anguleux de la grosseur de petits pois jusqu'à des blocs qui pèsent quelquefois plus de vingt mille kilogrammes. Quoique des cailloux se trouvent dispersés partout dans ces dépôts, on rencontre cependant çà et là des couches entières ou des amas de cailloux à bords et angles peu arrondis. De même que les fossiles, ils nous apprennent que le transport n'a pas été effectué par l'eau seule, mais par l'intermédiaire de glaces flottantes. Les grands blocs erratiques de la Drenthe et de l'Overyssel, qui ont servi aux premiers habitants de notre pays à élever les célèbres *dolmens* connus sous le nom de *hunnebedden*, sont des blocs de granite, de diorite, de grès silurien, de gneiss, roches qui maintenant encore forment des montagnes en Scandinavie. Assez de preuves, certes, pour indiquer l'origine de notre *diluvium septentrional* ou scandinavien, c'est-à-dire des dépôts diluviens que j'ai indiqués sur ma carte par une teinte brun-clair, N°. 1.

Pendant qu'au nord-est de notre pays se déposaient les masses diluviennes dont je viens de parler, d'autres dépôts se formaient à l'est et au midi.

Des rivières coulant de l'Europe centrale, comme le Rhin, et probablement aussi des rivières qui actuellement n'existent plus, déposaient le détritus de leurs montagnes riveraines dans la mer diluvienne, aux endroits où nous trouvons aujourd'hui les plaines de sable du Mookerheide et les collines de la Gueldre, aux environs de Nymègue.

Ces rivières formaient de vastes deltas dans leurs estuaires, des couches de limon, de sable, d'argile, de gravier. Ces débris de roche, vus au microscope, ont tous des angles et des bords arrondis ou émoussés, preuve certaine de leur transport dans l'eau courante. Parmi les cailloux, nous retrouvons les mêmes roches qui composent les montagnes de la Suisse et de l'Allemagne le long du Rhin. Les cailloux sont composés principalement de quartz blanc, quelquefois coloré extérieurement en brun par l'oxyde de fer. A ces dépôts je donne le nom de *diluvium oriental*; c'est le diluvium du Rhin de Staring, sur ma carte la teinte gris brun, N°. 2.

En même temps que les dépôts dont il vient d'être question, d'autres masses de détritus furent déposées. On en doit chercher l'origine dans le midi. La Meuse se jetait alors dans la mer qui baignait les côtes tertiaires du Brabant méridional et les falaises crétacées du Limbourg. Le détritus de l'Ardenne et du Condroz, poussé au nord par la Meuse, était déposé dans l'estuaire de cette rivière, là où nous trouvons actuellement les dépôts diluviens du Brabant méridional et septentrional et les plaines sablonneuses de la province d'Anvers, c'est-à-dire les dépôts qui forment, en Belgique, la partie caillouteuse du campinien de d'Omalius d'Halloy, les silex et cailloux de Dumont. Ces dépôts se prolongent aussi dans notre pays, où je propose de leur donner le nom de *diluvium méridional*; c'est le diluvium de la Meuse de Staring, le diluvium caillouteux de Dewalque, indiqué sur ma carte par la teinte verte, N°. 3.

En jetant maintenant un coup d'œil sur la carte, on observera que je n'ai pas encore parlé de ces parties de notre diluvium

néerlandais qui constituent la majeure partie de la Gueldre, de l'Overyssel et de la province d'Utrecht, c'est-à-dire des dépôts coloriés en jaune sur la carte, N°. 4. On sait que Staring a donné à ces dépôts la dénomination de diluvium entremêlé. En effet, ces dépôts présentent des matières provenant des trois sources dont nous venons de parler, le tout entremêlé et se recouvrant mutuellement. Ici on voit une masse de sable avec des blocs erratiques du nord, à côté d'une couche de limon apportée par le Rhin; là on remarque une plaine composée de détritus ardennais, recouvrant un amas de gravier dont les cailloux arrondis nous apprennent qu'un jour ils ont fait partie des Alpes de la Suisse ou des roches de la Hesse; sur un autre point nous trouvons des silex roulés des dépôts du Rhin, au-dessus d'une couche renfermant des débris de roches dévoniennes et de calcaire carbonifère des rives de la Meuse, et en maint endroit toutes ces matières différentes sont entremêlées si intimement et forment une masse si confuse, qu'il est impossible d'y distinguer les lieux de provenance. Vraiment, le nom de *diluvium entremêlé* est bien choisi pour ces dépôts.

Après ce court aperçu des quatre divisions de notre diluvium, il reste encore à parler d'une cinquième, qui est pour nous, en ce moment, la plus intéressante de toutes, parce qu'elle nous conduira à la solution de la question qui nous occupe, à savoir: l'origine de nos dunes maritimes. C'est le *zanddiluvium*, le diluvium sableux de Staring; ce sont les dépôts auxquels je propose de donner le nom de *diluvium remanié* ou déplacé, et qui sont représentés sur la carte par une teinte rose, N°. 5. Si je ne me trompe, personne n'a encore donné une explication acceptable de l'origine de ces dépôts de sable quartzeux. Staring, en parlant de son *zanddiluvium*, dit: *het moet op de plaats zelve ontstaan zijn* — il doit s'être formé sur les lieux mêmes. Il me semble que cette phrase renferme l'aveu qu'il ne connaît pas les lieux de provenance ni le mode de formation de ces dépôts. Sous ce rapport, voici comment, à mon avis, les choses ont dû se passer.

Après la formation des dépôts décrits ci-dessus, la Néerlande

ne se composait que des parties qui portent sur ma carte les couleurs brune, grise, verte et jaune. Les endroits teintés en rose et toute la partie non coloriée gisaient encore sous les eaux de la mer, dont les vagues se brisaient sur les plages des îles et des presqu'îles que formaient alors les parties plus ou moins élevées au-dessus du niveau de la mer. Je dis *plus ou moins* élevées, car, sans aucun doute, la plupart de ces terres, à l'exception des collines telles que le Veluwe, le Hondsrug et quelques autres, n'étaient alors que des bancs de sable, des plages, des terres basses, qui deux fois par jour étaient inondés par la marée. La mer baignait ces terres, le mouvement des eaux, causé par les vents, le flux et le reflux et les courants, usait ces bancs et ces plages, en détachait des particules, en arrachait des lambeaux. L'érosion faisait des progrès continus partout où la mer pouvait exercer pendant des siècles son action démolissante. Mais la mer ne peut pas retenir les débris qu'elle détache de la terre; si le vent se repose, si les eaux redeviennent tranquilles, les matières tenues pendant quelque temps en suspension tombent au fond: elles se déposent dans les creux, dans les lieux bas. Ainsi des masses de sable ont été remaniées et déplacées, et ce sont elles, je pense, qui forment à présent les dépôts indiqués par la teinte rose sur ma carte. Voilà la raison pour laquelle je propose de nommer *diluvium remanié* le *zanddiluvium* de Staring. C'est surtout vers le midi que furent entraînées par les courants les masses détachées de notre diluvium. Une quantité énorme de sable fut déposée dans le sud de la Néerlande et dans le nord de la Belgique, et forma une très grande partie des dépôts connus sous la dénomination de *campiniens*. En effet, nous savons par les beaux travaux des géologues belges, — je ne citerai ici que les noms vénérés de d'Omalius d'Halloy et de Dumont, et, parmi les vivants, ceux de M. Dewalque et de M. Dupont, — que le campinien de la Belgique est formé d'un amas de sable reposant sur une couche de sable à cailloux roulés. Mais il s'en faut de beaucoup que toutes ces masses aient la même origine. Les dépôts qui sont caillouteux correspondent,

je crois, à notre diluvium méridional ou de la Meuse; ils sont caractérisés par la présence de fragments de roches semblables à celles de l'Ardenne, et se prolongent, d'après d'Omalius d'Halloy, non-seulement dans le reste de la vallée de la Meuse, mais se retrouvent dans toutes les vallées où des eaux venant de l'Ardenne coulent vers le nord. Ce dépôt caillouteux, dans la Campine, est accompagné et le plus souvent recouvert de sables sans cailloux, et ce sont ces sables campiniens qui, déjà rangés par Staring dans son zanddiluvium, doivent, d'après mon opinion, être considérés comme des masses remaniées et déplacées, des masses dont l'origine, le lieu de provenance se retrouve dans les dépôts diluviens de la Néerlande, surtout dans ceux que nous avons nommés le diluvium oriental et méridional. Il me semble que l'éminent géologue belge, M. Dewalque, est de mon avis lorsqu'il dit: „le diluvium caillouteux, dont nous avons indiqué la présence dans les monticules de la Campine limbourgeoise, passe *sous le sable campinien*," et feu d'Omalius d'Halloy était d'accord avec notre grand géologue néerlandais Staring, en admettant qu'il y a une différence dans l'origine des dépôts caillouteux et des couches de sable sans cailloux, qui constituent le sable campinien de Dumont.

Nous venons donc de voir qu'une partie des masses détachées des dépôts diluviens fut déposée dans les lieux bas entre les bancs et les terres, et que de grandes quantités de ces matières furent entraînées vers le midi et recouvrirent les dépôts caillouteux de la Campine. Mais ce n'est pas tout. Des masses énormes de sable, suspendues dans l'eau et poussées par le refoulement des vagues, furent entraînées vers l'ouest, vers la mer qui s'étendait des plages du diluvium jusqu'aux côtes de l'Angleterre. Cependant le chemin parcouru dans cette direction ne fut pas long: bientôt les sables se déposèrent au fond de la mer et formèrent des bancs qui, s'élevant pendant des siècles, émergèrent enfin, sous forme de bourrelet, au milieu des eaux de la mer. Probablement les sables flottants rencontraient à un certain endroit de la mer un courant assez fort pour arrêter leur mouvement vers l'ouest. On

sait que, lorsque deux courants de forces inégales se rencontrent, le plus fort joue à l'égard du plus faible le même rôle que les lacs et les mers exercent à l'égard des cours d'eau qui s'y jettent, c'est-à-dire, que les matières solides contenues dans le cours le plus faible se déposent en forme de bourrelet le long du cours le plus fort. Ainsi se formait dans la mer, à une certaine distance de la côte, une île longue et étroite, un cordon de monticules de sable, semblable à ces formations placées à l'embouchure de quelques rivières et qui portent le nom de *Nehrungen* en Prusse et celui de *lidi* sur les côtes de la Vénétie. Cette barre de sable séparait de la mer une espèce de lac ou de mer intérieure, que l'on appelle *Haf* en Prusse et *laguna* en Italie. Les recherches des géologues ont démontré que ce bourrelet ne s'est pas formé à la place où nous voyons à présent nos dunes maritimes, mais plus loin dans la mer, et qu'il s'est déplacé plus tard vers l'intérieur des terres, parce qu'il était composé de sables mouvants, et que ces sables ont communément un mouvement progressif de la mer vers les terres. Aussitôt que ce bourrelet exista, l'eau de la mer intérieure devint une eau stagnante, les rivières continuèrent à y déposer leur limon, des couches alluviennes se formèrent, des tourbières immenses prirent naissance, en un mot l'alluvium de la Néerlande apparut au jour.

En résumé, je crois pouvoir conclure:

1°. Qu'il est préférable de donner le nom de *diluvium remanié* au zanddiluvium de Staring.

2°. Que le sable campinien *sans cailloux* et le sable qui compose nos *dunes maritimes* sont identiques aux dépôts de sable remanié de la Néerlande.

3°. Que le cordon ou bourrelet de sables mouvants, qui a été le principe de nos dunes actuelles, s'est formé *après* le dépôt du diluvium en Néerlande, et par conséquent dans les derniers jours de l'époque glaciaire, ou *après* cette période.

4°. Que les couches de l'alluvium de la Néerlande ne se sont déposées qu'à l'abri de ce bourrelet de sable dans la mer, et qu'elles sont par conséquent *postérieures* à la formation des dunes maritimes.

SUR L'INFLUENCE

DU

SANG ET DES NERFS

SUR LE POUVOIR ÉLECTROMOTEUR DES SECTIONS TRANSVERSALES ARTIFICIELLES DES MUSCLES,

PAR

TH. W. ENGELMANN.

A la fin de mon Mémoire précédent [1]), j'ai avancé brièvement que chaque section transversale artificielle de muscles monomères ordinaires se laisse rendre inactive tout en conservant une force latente considérable, et cela dans des conditions qui donnent au résultat observé la valeur d'un argument contre la théorie de la préexistence. Je vais essayer maintenant de fournir la preuve de ces assertions.

J'ai été conduit aux faits dont il sera ici question par les considérations suivantes. S'il est vrai que l'activité électromotrice d'un muscle en repos dépende de la mort successive des éléments de la couche située à la surface coupée, il est à prévoir que, dans des conditions qui retardent cette mort, un affaiblissement de la force électromotrice sera observé.

---

[1]) *Etudes comparées sur l'action électrique des muscles et des nerfs*, dans: *Arch. néerl.*, t. XIII, p. 343.

Une de ces conditions est évidemment la nutrition par le sang. De même que tous les autres éléments organiques, les muscles, à la suite d'une lésion, meurent beaucoup plus lentement lorsque la circulation sanguine y est entretenue que dans le cas contraire. Quand on tranche un muscle d'une grenouille par une section sous-cutanée, en respectant les grands vaisseaux, on le trouve souvent après des semaines, et même après des mois, encore excitable sur la plus grande partie de sa longueur, jusque tout près de la blessure, tandis que la suppression de la circulation du sang détermine en peu de temps une inertie complète dans toutes les parties.

Il y avait donc lieu de croire que, sous l'influence de la nutrition par le sang, la négativité d'une coupe musculaire transversale diminuerait plus rapidement qu'en l'absence de cette action, et que, par contre, le rafraîchissement de la coupe produirait alors un accroissement notable de la force. Cet accroissement devait, à cause de la lente progression de la mort le long des tubes musculaires, se montrer, entre certaines limites, d'autant plus considérable que la nouvelle section transversale aurait été pratiquée à une plus grande distance de la blessure primitive. Chez les muscles monomères excisés, et par suite soustraits à la circulation, on sait que la force manifeste ne s'abaisse que très lentement et que le rafraîchissement de la section, à un moment quelconque, ne produit qu'un effet pour ainsi dire insensible.

Pour vérifier ces différentes présomptions, j'entrepris les expériences suivantes.

Ayant choisi quinze exemplaires bien portants de *Rana esculenta*, j'introduisis sous la peau de la cuisse un scalpel très petit et très effilé, au moyen duquel je tranchai, d'un *seul* coup vigoureusement appliqué, à environ 4 mm. du bassin et dans une direction aussi exactement transversale que possible, l'un des deux muscles couturiers (tantôt le droit, tantôt le gauche). A travers la peau on pouvait sentir, au point de section, les deux bouts épaissis du muscle, qui s'étaient écartés l'un de

l'autre de un ou plusieurs millimètres. Après l'opération, les grenouilles, placées dans de grands verres, étaient laissées dans la chambre, à une température variant de 12 à 18° C. Pour éviter que de l'eau ne pénétrât par la plaie cutanée, laquelle n'avait du reste que 1½ mm. de longueur et dont les bords se recollaient ordinairement très vite, les grenouilles n'étaient pas plongées dans l'eau, mais seulement tenues humides.

Au bout de 1, 4 et 8 jours, on mesura, respectivement sur cinq individus, la force électromotrice:

A) du couturier resté intact, entre la section longitudinale naturelle (à environ 10 mm. de l'extrémité tibiale, au milieu de la face antérieure du muscle) et deux sections transversales artificielles *a* et *b*, qui étaient pratiquées, une à deux minutes l'une après l'autre, à environ 4 et 5 mm. de distance de l'origine pelvienne du muscle;

B) du couturier opéré, entre la section longitudinale naturelle (au même point qu'en A [1])) et, successivement, *a* l'ancienne section transversale et *b*, *c*, *d* etc. une série de sections transversales artificielles, qui étaient faites, après des pauses de une à deux minutes, respectivement à des distances d'environ 1, 2, 3 etc. millimètres de la section primitive. L'examen commençait alternativement par A et par B.

La dérivation se faisait de la manière décrite antérieurement [2]), au moyen de petits lambeaux de tissu connectif, qui touchaient la section transversale sur une étendue aussi large que possible, mais sans avoir le moindre contact avec la section longitudinale.

Dans le tableau suivant, I, les forces électromotrices A *a* des muscles du côté intact sont données en fractions d'un Daniell; celles de la seconde section transversale au côté intact (A *b*), ainsi que les forces B (*a*, *b*, *c* etc.) des muscles opérés, sont exprimées en centièmes des forces A *a* des muscles intacts correspondants de l'autre côté du corps. Derrière les maxima et

---

[1]) Ce point répondait ordinairement au maximum de la positivité.

[2]) *l. c.* p. 307.

les minima de la force manifeste B *a*, se trouvent chaque fois, placés entre parenthèses et exprimés également en centièmes des forces correspondantes A *a*, les maxima de la force latente qui ont été mesurés sur le même muscle (et qui répondent le plus souvent à B *d* ou à B *e*).

Tableau I.

		A.		B.					
		a.	*b.*	*a.*		*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*
1 jour	moyenne	0,050D	91,4%	24,7		64,5	72,8	78,3	77,7	65,7
après	maximum	0,066 "	102,0 "	43,3	(97,0)	99,0	101,0	100,0	112,0	108,0
l'opération.	minimum	0,030 "	82,1 "	9,1	(80,0)	42,9	51,7	54,0	49,6	53,2
4 jours	moyenne	0,050 "	95,5 "	14,1		44,7	61,6	69,7	64,8	54,0
après	maximum	0,064 "	99,0 "	21,8	(68,1)	71,8	87,5	96,6	82,5	56,0
l'opération.	minimum	0,038 "	93,5 "	3,9	(62,1)	21,5	40,0	53,5	52,5	52,0
8 jours	moyenne	0,037 "	88,9 "	5,3		35,9	50,7	53,1	57,2	51,0
après	maximum	0,048 "	100,0 "	15,2	(103,3)	93,5	103,3	95,7	91,3	61,7
l'opération.	minimum	0,032 "	80,4 "	0,0	(61,7)	5,4	13,3	23,3	25,0	37,5

On voit que notre attente n'a pas été trompée: la force manifeste B *a* de la section transversale sous-cutanée s'abaisse relativement avec rapidité, et tombe notamment beaucoup au-dessous de la force latente encore réalisable par le rafraîchissement, bien que celle-ci, d'ailleurs, décroisse aussi d'une manière très marquée.

En prenant la force latente = 1, la force manifeste correspondante B *a* s'élevait

après 1 jour, en moyenne, à 0,32 (maxim. 0,44, minim. 0,11).
" 4 jours, " " " 0,20 (" 0,32, " 0,06).
" 8 " " " " 0,09 (" 0,16, " 0,00).

Les moyennes, aussi bien que les maxima et les minima, montrent donc l'abaissement progressif. Celui-ci, on le voit, s'opère le premier jour avec une grande rapidité, plus tard lentement, et en moyenne presque en ligne droite. Cette marche autorise à croire que l'abaissement continue jusqu'à ce que la force soit devenue imperceptible. Effectivement, au bout de 8 jours déjà, la force B *a* fut trouvée, dans deux cas sur cinq,

égale à zéro, la valeur de la force latente étant respectivement de 0,0232 et 0,0227 D.

Le tableau I confirme aussi que la force latente croît à mesure qu'on s'éloigne de la blessure. Dans la plupart des cas, elle atteignait son maximum, au bout de 1 jour, à environ 3 mm. de la blessure, au bout de 4 jours à 4 mm., au bout de 8 jours à 5—6 mm. Sous ce rapport, du reste, on trouve de grands écarts comparativement à la moyenne. L'aspect des muscles permet de reconnaître, au premier abord, si la force croîtra rapidement ou lentement avec la distance à la blessure. Dans le premier cas, ils ont, jusque tout près de la lésion, leur apparence ordinaire. Un léger trouble diffus, occupant la couche immédiatement voisine de la face traumatique, sur une épaisseur de 1—2 mm. tout au plus, voilà tout ce qu'on observe d'anormal. Concurremment, le muscle éprouve dès le premier rafraîchissement des secousses énergiques, et le maximum de la force latente est déjà atteint après la première ou, plus fréquemment, après la seconde section. Dans l'autre cas, le muscle est, jusqu'à 3, 4 mm. de la blessure, ou même encore un peu au-delà, fortement hypérémié, quelquefois rempli d'extravasations microscopiques, trouble, tuméfié; quand on le coupe, il ne tressaille que faiblement et seulement dans quelques-unes de ses fibres, aussi longtemps que la section ne tombe pas dans la partie d'aspect normal, et, en concordance avec ce fait, le maximum de la force n'est guère obtenu qu'à la 5e section, ou même encore plus tard.

Comment, d'un autre côté, les choses se passent quand la circulation sanguine est exclue, c'est ce que nous apprennent déjà, en partie, les anciennes expériences, relatives à des muscles de grenouille excisés, mais encore vivants. Par exemple [1]), la force du couturier, à une température de 12—25° C., dans la chambre humide, s'abaissa en 24 heures à 38,7 % (moyenne de 33 expériences), et ne se releva que de 3,9 % à la suite du rafraîchissement, pratiqué à 1—2 mm. de la blessure.

---

[1]) *Archiv. néerl.*, t. XIII, p. 315.

Cette différence dans les phénomènes observés pourrait, toutefois, avoir encore une autre cause que le défaut de nutrition par le sang. Presque *toutes* les conditions se trouvent en effet changées, quand le muscle est extrait du corps.

Pour décider quelle influence l'*exclusion de la circulation sanguine* exerce, à elle seule, sur les phénomènes de la force manifeste et de la force latente, j'ai donc entrepris une série d'expériences conduites exactement comme les précédentes, sauf que, en outre, le cœur des grenouilles opérées était retiré du corps par une petite ouverture pratiquée dans la paroi thoracique antérieure, puis coupé au-dessus de la limite auriculo-ventriculaire. En peu de minutes, les grenouilles avaient perdu presque tout leur sang par la blessure; néanmoins, la plupart d'entre elles, tenues humides, restèrent encore en vie pendant plus de 24 heures.

Sur cinq de ces grenouilles, qui au bout d'un jour paraissaient encore très vivaces et même plus excitables que dans l'état normal, j'exécutai, après ce laps de temps, les mesures d'intensité indiquées pour la première série d'expériences. Tout ce que a été dit à propos de celles-ci reste applicable au cas actuel, et la signification des lettres, dans le tableau II, est aussi la même que dans le tableau I.

Tableau II.

	A.			B.				
	a	*b*		*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*
moyenne	0,0448D.	98,4	pCt.	51,6	50,9	71,5	71,2	68,3
maximum	0,0504 „	110,9	„	70,6 (88,8)	83,3	88,8	78,8	78,0
minimum	0,0368 „	87,3	„	37,0 (61,0)	39,1	61,0	61,0	50,0

Tandis que la force latente, comme on devait s'y attendre, s'est abaissée, à conditions égales, un peu plus que dans le cas où la circulation sanguine était conservée, la force manifeste s'est maintenue à une hauteur beaucoup plus considérable. La

première étant de nouveau supposée égale à 1, la seconde est seulement descendue

en moyenne, à 0,72 (contre 0,32 dans le cas de circul. entretenue).
„ maximum, „ 0,96 („ 0,44 „ „ „ „ „ „).
„ minimum, „ 0,54 („ 0,11 „ „ „ „ „ „).

En somme, toutefois, une influence déprimante, s'exerçant sur la force manifeste même après la suppression de la circulation, reste encore très nettement accusée. Ce résultat pourrait déjà s'expliquer pas la seule considération que, dans les conditions des expériences du tableau II, la nutrition par le sang [1]) et la lymphe n'était pas entièrement éliminée, mais n'avait sans doute subi qu'une forte réduction. La faible efficacité que le rafraîchissement de la section, au bout de 24 heures, avait aussi manifestée chez les muscles excisés, montre que, même dans les conditions si défavorables de ce cas, il y a encore en jeu des influences qui tendent à une restitution de l'état normal du pouvoir électromoteur, de même que cela a indubitablement lieu sous le rapport des actions mécaniques (contractilité). Il est à présumer que ces effets sont imputables au liquide nourricier qui imbibe les fibres et remplit les interstices capillaires qu'elles laissent entre elles.

Mais, pour expliquer les différences que présentent, en ce qui concerne la force manifeste, les muscles excisés et les muscles non excisés, il y a encore à tenir compte d'un facteur important: l'*influence des nerfs*. Dans le premier des deux cas en question, les muscles ne sont pas seulement soustraits complètement à l'influence des courants sanguin et lymphatique, mais aussi à celle du système nerveux central. Ils cessent, notamment, d'être excités. Comme l'alternance de repos et d'activité paraît être une condition générale pour la conservation de l'intégrité des éléments organiques excitables, il est à présumer que le maintien des connexions entre les muscles et les centres nerveux, par

[1]) Dans tous les cas, effectivement, on a encore trouvé un peu de sang dans les muscles.

cela seul qu'il implique l'excitation intermittente des muscles, contribuera, en général, à rendre inefficace la section transversale artificielle.

A la vérité, M. du Bois-Reymond [1]), en tétanisant par l'intermédiaire de leur nerf des muscles excisés, n'a pas réussi à rendre sensiblement parélectronomique la section transversale artificielle, ainsi que cela a lieu pour la section naturelle. Mais, sans aucun doute, il faut chercher, avec M. du Bois-Reymond [2]), la raison de cet insuccès dans la circonstance que la couche parélectronomique, à mesure qu'elle prend naissance près de la section transversale artificielle, est immédiatement détruite par l'acide qui se forme en ce même point. „La mort progressive du muscle, à partir de la section transversale artificielle, serait par conséquent la cause de l'absence de réaction terminale en ce point" [3]). Avec des muscles sectionnés sous la peau et continuant à être traversés par le sang, il était très possible, toutefois, qu'une influence positive des nerfs se manifestât.

Pour m'en assurer, je sectionnai, chez 15 individus bien portants de *Rana esculenta*, non-seulement le muscle couturier, mais aussi le plexus sciatique du même côté, en épargnant avec soin les vaisseaux. Du reste, je procédai exactement comme dans la première série d'expériences. Les désignations, dans le tableau III, sont par suite aussi les mêmes que dans le tableau I.

Tableau III.

		A.		B.						
		a.	*b.*	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*	*f.*	*g.*
1 jour	moyenne	0,0504D	100,6%	42,5	70,2	75,8	76,3	79,8	76,6	
après	maximum	0,0534 „	106,0 „	70,2(119,6)	112,3	119,6	112,3	109,0	92,5	
l'opération.	minimum	0,0440 „	96,1 „	27,6 (50,7)	38,8	50,7	49,3	50,7	44,8	
4 jours	moyenne	0,0467 „	92,8 „	25,8	61,7	78,7	87,7	82,1		
après	maximum	0,0560 „	99,0 „	42,0 (70,0)	81,4	96,6	99,0	98,2		
l'opération.	minimum	0,0380 „	83,1 „	19,7 (98,2)	48,0	58,0	62,0	68,0		
8 jours	moyenne	0,0408 „	97,1 „	14,3	42,4	62,7	69,1	74,5	76,5	70,0
après	maximum	0,0488 „	99,0 „	31,3(101,2)	78,0	94,0	92,0	87,5	101,1	90,0
l'opération.	minimum	0,0320 „	95,1 „	0,0 (70,0)	23,0	45,6	44,6	40,0	40,0	38,0

[1]) E. du Bois-Reymond, *Ueber die negative Schwankung des Muskelstromes bei der Zusammenziehung*. 3. *Abtheilung* (*Archiv f. Anat., Physiol.* etc., 1876, p. 128 et suiv.) [2]) *Ibid.*, p. 149 et suiv. [3]) *Ibid.*, p. 150.

Si nous comparons ces nombres avec ceux du tableau I, l'influence attendue se décèle immédiatement: en cas de section des nerfs, la force manifeste décroît, tant d'une manière absolue qu'en comparaison de la force latente, beaucoup plus lentement (en moyenne, à peu près la moitié plus lentement) que dans le cas où le muscle reste en rapport avec le système nerveux central.

Le maximum de la force latente étant supposé chaque fois égal à 1, la force manifeste s'élevait:

après 1 jour,	en moyenne,	à 0,53,	contre 0,32	en cas	de	non-section	du	nerf.		
	" maxim.,	" 0,59,	" 0,44	"	"	"	"	"	"	
	" minim.,	" 0,37,	" 0,11	"	"	"	"	"	"	
après 4 jours,	" moyenne,	" 0,29,	" 0.20	"	"	"	"	"	"	
	" maxim.,	" 0,60,	" 0,32	"	"	"	"	"	"	
	" minim..	" 0,20,	" 0,06	"	"	"	"	"	"	
après 8 jours,	" moyenne,	" 0,19,	" 0,09	"	"	"	"	"	"	
	" maxim.,	" 0,31,	" 0,16	"	"	"	"	"	"	
	" minim.,	" 0,00,	" 0,00	"	"	"	"	"	"	

Nous pouvons donc regarder comme démontré que, dans la conservation des connexions vitales entre le muscle et le système nerveux central, tout comme dans la conservation de la circulation sanguine, sont impliquées des conditions qui tendent à détruire l'activité électromotrice des sections transversales artificielles. Vu que, sous tous les autres rapports, l'influence connue de ces deux circonstances se traduit par la conservation ou le rétablissement d'états *normaux*, il faut admettre qu'il en est de même sous le rapport des phénomènes électromoteurs. Or, cela revient à dire que, dans le muscle *normal*, au repos, il n'existe pas de différences sensibles de tension électrique.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR LES

PHÉNOMÈNES MICROSCOPIQUES DE LA CONTRACTION MUSCULAIRE,

PAR

TH. W. ENGELMANN.

Si l'on demande quel avantage positif et certain la science a retiré des nombreuses recherches microscopiques faites dans les derniers temps sur la contraction des fibres musculaires à stries transversales, on est presque tenté de répondre: aucun. Je ne connais, en effet, pas *une seule* observation moderne qui se soit acquis dans la science un droit de cité incontestable. A la conviction universelle qu'il s'agit ici d'un des problèmes les plus difficiles de l'investigation microscopique, répond la défiance générale avec laquelle est accueillie toute tentative nouvelle de solution.

Celui qui n'est pas mêlé directement à la question, et dont l'avis ne peut s'appuyer sur des recherches propres, ne saurait guère faire autrement que trouver cette situation très naturelle, sinon irrémédiable. Pourtant, je suis intimement persuadé qu'un changement y est très possible. Car on peut établir objectivement qu'il s'agit ici de choses tombant encore, en grande partie, bien en deçà des limites de l'observation physique parfaitement assurée. Une série de faits importants, qui jusqu'à ce

jour sont loin d'être généralement admis, prennent place, à mes yeux, parmi les faits histologiques les plus faciles à démontrer, les plus inébranlables.

Remettre ces faits au rang qu'ils méritent, faire pénétrer dans tous les esprits la conviction que sur beaucoup de points, en cette matière, on peut atteindre le degré de certitude que comportent généralement les observations microscopiques, vaincre la défiance que rencontrent, sans distinction, toutes les communications histologiques relatives à la fibre musculaire contractile, — tel est le but que je me propose dans les pages suivantes.

La défiance en question me paraît s'alimenter à deux sources principales. En premier lieu, on se demande si la méthode aujourd'hui généralement suivie pour l'étude microscopique de la contraction — fixation des ondes de contraction par l'acide osmique, l'alcool, etc. — fournit réellement, comme on l'assure, des images foncièrement fidèles du phénomène normal. En second lieu, on est frappé des nombreuses contradictions qui se manifestent entre les observateurs, même lorsqu'ils ont travaillé sur des objets semblables, d'après une méthode identique.

Quant à la première de ces objections, il n'est pas douteux qu'elle se présente tout d'abord comme parfaitement fondée. Lorsqu'on sait combien il est déjà difficile de tuer, sans lui faire perdre son aspect normal, la substance musculaire à l'état de repos, le problème de fixer sans altération le phénomène fugitif de la secousse musculaire peut sembler presque désespéré. Et à coup sûr, pris dans toute son étendue, ce problème est insoluble. Mais entre certaines limites, même assez larges, la chose est très praticable, comme je l'ai déjà fait voir antérieurement [1]), et comme je vais le montrer de nouveau, mes premières indications n'ayant pas été, paraît-il, suffisamment explicites. Le point essentiel est d'assigner les limites dont il vient d'être question.

Or, pour cela, il est absolument nécessaire de commencer par étudier les phénomènes, aussi exactement que possible, sur l'objet

---

[1]) E. Pflüger, *Archiv f. d. ges. Physiologie*, t. VII, 1873, p. 155 et suiv.

vivant. Plus les images, obtenues par la méthode usuelle des préparations durcies, se rapprocheront de celles de l'état vivant, plus elles mériteront confiance. En suivant cette marche, nous trouverons aussi l'occasion naturelle de discuter et, à ce que j'espère, de dissiper les objections qui dérivent des divergences entre les résultats obtenus par les divers observateurs.

Une étude nouvelle et attentive du phénomène de la contraction de la fibre vivante doit sembler d'autant plus opportune que, dans les derniers temps, l'observation de l'objet vivant a été entièrement repoussée au second plan. A la vérité, les difficultés qu'on y rencontre ne sont pas médiocres. Je n'ai pas besoin de les énumérer: elles ont été souvent décrites, et quiconque aborde le sujet n'apprend que trop vite à les connaître par expérience. Mais on va trop loin quand on les regarde comme insurmontables. Je suis obligé de croire qu'en ce cas on n'a pas été heureux dans le choix des objets d'étude.

Dans mon premier Mémoire, j'ai déjà dit que certains objets vivants, surtout les muscles striés de l'intestin de la Mouche, et plus spécialement ceux de la portion comprise entre le rectum et le point où débouchent les vaisseaux de Malpighi, permettent d'établir, sur des bases solides, une série de faits des plus importants. Depuis lors, avec des moyens d'étude en partie perfectionnés, j'ai repris et continué ces recherches, tant sur les objets anciens que sur des parties nouvelles. Jusqu'ici, toutefois, je n'ai pas réussi à trouver des objets meilleurs et notamment d'un accès plus facile, de sorte que je dois me borner à appeler encore une fois l'attention de mes confrères sur les objets cités plus haut, et à exposer aussi fidèlement que possible les observations auxquelles ils m'ont conduit. Cela seul, du reste, aura déjà quelque intérêt, si je me trompe. Pour éviter des redites inutiles, je m'en tiendrai, toutefois, aux faits qui ne sont pas encore généralement admis, bien que, dans ma conviction, ils puissent être reconnus d'une manière *absolument certaine* sur l'objet vivant.

Ces faits sont les suivants:

1) *Lorsque le raccourcissement dépasse une certaine mesure, les*

stries transversales, observées à la lumière ordinaire, deviennent moins distinctes et parfois même disparaissent complètement: établissement du *stade d'homogénéité* ou *de transition.*

Ce fait est si facile à constater, non-seulement sur les fibres de l'intestin de la Mouche, mais aussi sur d'autres muscles d'Insectes, (larves de Cousins, pieds d'Araignées aquatiques transparentes, Hydrophile, Géotrupe), que je ne m'y arrêterais pas si M. Ranvier [1]), à raison d'observations faites avec son myospectroscope, n'avait récemment révoqué en doute l'existence d'un stade d'homogénéité dans la contraction du muscle vivant.

Mais il est aisé de montrer que l'observation sur laquelle est fondée l'objection de M. Ranvier, à savoir la persistance du spectre fourni par le muscle, malgré les plus fortes variations du degré d'excitation, ne peut avoir aucune valeur démonstrative. Avec la disposition expérimentale que comporte l'appareil de M. Ranvier, il n'y a pas à songer un seul instant à la possibilité que tous les segments de fibres qui couvraient la fente, ou seulement une grande partie d'entre eux, se soient trouvés simultanément dans le même stade du raccourcissement, par exemple, dans le stade de transition. Beaucoup de fibres seront évidemment restées à l'état de repos; un certain nombre n'auront éprouvé que de légères secousses, d'autres se seront contractées fortement. Il y a aussi tout lieu de croire que le raccourcissement moyen n'a jamais atteint le degré nécessaire pour l'établissement du stade de transition. Dans tous les muscles que j'ai étudiés, ce stade exigeait, pour son plein développement, un raccourcissement de près de la moitié de la longueur du muscle à l'état de repos.

Je ne connais qu'un seul cas où la fibre vivante reste très distinctement striée en travers, même quand le raccourcissement atteint la limite ordinairement suffisante. Ce cas se présente lorsque, dans la fibre inactive, les disques accessoires sont plus foncés que les disques transversaux. Déjà antérieurement [2]) j'ai attiré

[1]) Ranvier, *Du spectre musculaire. Compt. rend.*, 1 juin 1875. — *Traité technique d'histologie*, 1875, p. 519.

[2]) *l. c.*, p. 41.

l'attention sur ce caractère, qui est loin d'être rare chez les Insectes et qui peut donner lieu aux erreurs les plus regrettables quand on observe superficiellement. De pareilles fibres, durcies pendant la contraction, au moyen de l'acide osmique ou de l'alcool, ont en général l'aspect de la fig. 5, pl. VII.

Entre les deux extrêmes, on trouve naturellement des passages, et on conçoit aussi que, dans chaque cas particulier, le degré de netteté que conservent les stries transversales dépende de circonstances accessoires, telles que la nature et l'intensité de l'éclairage, la force du grossissement employé, l'épaisseur des fibres musculaires, la durée de la contraction, etc. Ce qui est sûr, toutefois, c'est que, dans les fibres qui à l'état de repos montrent entre leurs couches les différences de clarté ordinaires, les stries transversales deviennent moins distinctes, ou même invisibles, dès que la contraction atteint la valeur ci-dessus indiquée.

2) *Le défaut de netteté des stries transversales, dans le stade de passage, tient essentiellement à la diminution de la différence de clarté, ou de la différence de pouvoir réfringent, entre la substance principale et la substance intermédiaire.*

Ce fait peut aussi être mis hors de doute par l'observation de la fibre vivante, quoiqu'il soit un peu moins facile à constater que le précédent. Je recommande de nouveau les fibres de l'intestin de la Mouche. Parmi un grand nombre de préparations, on peut être sûr de trouver quelques fibres qui, dans une situation favorable, présentent des ondes de contraction si énergiques et en outre d'un mouvement si lent, qu'il ne peut rester aucun doute sur la cause du décroissement de visibilité des stries transversales.

On a prétendu que les stries transversales deviennent indistinctes parce que les couches à réfraction inégale se rapprochent trop les unes des autres. Mais une pareille explication est tout à fait inacceptable, vu la hauteur absolue assez notable que les fibres musculaires de la Mouche, ainsi que celles de beaucoup d'autres Arthropodes, montrent encore au moment où les stries transversales disparaissent (en moyenne environ 0,004 mm. chez la Mouche). A un degré moindre de raccourcissement, dans le

stade de début, on ne voit en fait pas autre chose qu'un rapprochement des stries transversales. Mais, avant que l'apparence du contact et par suite de la fusion optique ait pu se produire, les stries s'évanouissent presque subitement. L'impression optique du phénomène est tout à fait caractéristique.

Les rides qui se forment aisément dans le sarcolemme, quand les fibres sont fortement raccourcies et surtout quand elles sont près de mourir, ne peuvent pas non plus être la cause du phénomène. Très souvent, en effet, j'ai vu les stries transversales pâlir, et même s'effacer, sans que le plus léger froncement du sarcolemme fût perceptible au bord des fibres.

On pourrait encore invoquer un déplacement des fibres, qui les ferait sortir du foyer de l'instrument; mais cette explication doit également être rejetée. Fréquemment, surtout lorsque la préparation est pressée par le verre qui la couvre, il n'y a aucune trace sensible d'un pareil déplacement. Là où il est assez prononcé pour troubler l'observation, on a ordinairement, et presque toujours quand les ondes de contraction se propagent très lentement, le temps de le compenser au moyen de la vis micrométrique. Si exacte que soit alors la mise au point, les stries transversales disparaissent pour un instant, pendant que l'onde passe.

3) *Quand le raccourcissement est très considérable* (de 50 % et plus), *les stries transversales reparaissent distinctement*: *stade d'inversion.*

Ce fait est si facile à observer sur l'intestin de la Mouche et sur d'autres préparations, qu'il pourrait tout au plus y avoir désaccord quant à la manière de l'interpréter. Lorsque le raccourcissement atteint des proportions suffisantes (60 % et au-delà), la fibre peut offrir des stries transversales beaucoup plus nettes et plus foncées que cela n'est jamais le cas dans l'état de relâchement. L'apparition des stries frappe d'autant plus que, immédiatement avant, la fibre a d'ordinaire l'aspect d'une matière réfringente parfaitement homogène.

4) *Les stries foncées du stade d'inversion sont dues à ce que*

les couches voisines du disque intermédiaire deviennent foncées ou fortement réfringentes.

La constatation de ce fait n'offre pas non plus de sérieuses difficultés. Un moyen très commode est fourni par les rides transversales du sarcolemme, qui se produisent si souvent à la suite d'un raccourcissement considérable. Par leur situation, les parties rentrantes de ces rides correspondent, comme on sait, à la substance intermédiaire, les parties saillantes à la substance principale. Or, en examinant une fibre de profil, on peut souvent reconnaître, avec toute la netteté désirable, que les stries foncées correspondent aux parties rentrantes des rides. — Une observation très instructive aussi est celle des cas où le disque intermédiaire fortement réfringent ne devient pas entièrement invisible durant le stade de transition. Au maximum de la contraction, on reçoit alors une impression comme si le disque intermédiaire devenait tout à coup plus épais et plus foncé.

Il est difficile de comprendre qu'on ait pu regarder les stries foncées du stade d'inversion comme la simple expression optique de plis transversaux du sarcolemme. Cette opinion est réfutée, en premier lieu, par le fait — déjà spécialement invoqué par moi dans une occasion antérieure [1]) et depuis lors maintes fois confirmé de la manière la moins équivoque — que les stries peuvent apparaître sans que le sarcolemme présente aucune trace de rides. En second lieu, par la circonstance que des rides, même très fortement développées, ne produisent jamais l'impression de stries transversales aussi foncées que celles qu'on observe très fréquemment dans le stade d'inversion. En troisième lieu, par la remarque que les stries transversales résultant de rides deviennent indistinctes, s'effacent même, à la suite d'un léger déplacement du foyer, tandis que les stries transversales propres au stade d'inversion restent bien accusées quand on promène le foyer à travers toute l'épaisseur de la fibre. Elles sont surtout, et sans aucune exception, d'une netteté parfaite lorsqu'on met

[1]) *l. c.*, p. 170.

au point sur le milieu de l'épaisseur de la fibre (coupe longitudinale optique), cas dans lequel les stries transversales provenant de rides s'évanouissent d'ordinaire complétement.

Pour surcroît de preuves, l'examen de préparations durcies dans l'alcool, dans l'acide osmique ou dans l'acide salicylique [1]) nous apprend que de petits faisceaux de fibrilles, isolés par arrachement, présentent le phénomène de l'inversion avec la même évidence que la fibre intacte. Enfin, M. Léon Fredericq [2]) a encore très justement fait observer que les fibres musculaires des écrevisses, dont le sarcolemme ne se fronce pas, parce qu'il est séparé des disques intermédiaires par un épais revêtement de protoplasme, n'en offre pas moins le schème normal du stade d'inversion.

Cela ne veut pas dire, bien entendu, que des plis transversaux du sarcolemme ne puissent, dans des circonstances spéciales, contribuer pour quelque chose à la production du phénomène de l'inversion.

5) *Dans le stade d'inversion les disques transversaux sont plus clairs (moins réfringents) qu'à l'état de repos.*

Pour établir ce fait, on doit s'en tenir exclusivement à des segments de fibres qui soient placés tout à fait horizontalement et qui restent aussi horizontaux durant la contraction. En outre, pour que les différences de clarté soient bien prononcées, il convient d'employer un éclairage purement central (diaphragme étroit). Si ces conditions sont remplies, et qu'à l'approche d'une onde on fixe son attention sur le milieu d'un ou de plusieurs compartiments, on remarque, sans le moindre doute, que ce milieu paraît beaucoup plus clair pendant le stade d'inversion qu'avant ce moment.

La comparaison avec les disques transversaux de fibres immédiatement voisines, à l'état de repos, montre d'ailleurs qu'il ne

---

[1]) Voir Nasse, *Zur mikroskopischen Untersuchung des quergestreiften Muskels* Pflüger's *Archiv*, t. XVII, 1878, p. 282.

[2]) Léon Fredericq, *Génération et structure du tissu musculaire*. Mémoire couronné. Bruxelles. 1875, p. 50.

s'agit pas ici d'une illusion due au contraste avec les nouvelles stries transversales foncées qui apparaissent subitement. Au repos, les disques transversaux de deux fibres circulaires juxtaposées de l'intestin de la Mouche ne diffèrent pas sensiblement en clarté et sont, suivant la règle générale, plus foncés que les disques isotropes. Mais dès que l'une des deux fibres est parcourue par une forte onde, ceux de ses compartiments qui se trouvent dans le stade d'inversion paraissent, entre les stries foncées, beaucoup plus clairs que les disques transversaux des fibres voisines restées en repos, à tel point qu'ils semblent même égaler en clarté les couches isotropes de ces dernières.

L'observation est d'autant plus décisive, que l'épaississement de la fibre, durant la contraction, doit agir dans un sens contraire.

6) *Examinées entre les nicols croisés, les fibres se montrent, dans tous les stades du raccourcissement, distinctement striées en travers.*

Vu l'importance de ce fait pour l'interprétation de l'acte de la contraction, j'y ai donné une attention toute spéciale, d'autant plus que l'exactitude en a été contestée par quelques-uns — d'après des préparations mortes, il est vrai — et qu'on a prétendu que, dans le stade d'inversion, la fibre entière paraît uniformément biréfringente. L'étude de la question sur l'objet vivant n'est pas très facile, car on comprend que beaucoup de conditions doivent être satisfaites simultanément pour qu'on puisse obtenir un résultat tout à fait certain. Avec les fibres de l'intestin de la Mouche, je n'étais pas arrivé, antérieurement, à la certitude. A cause de leur peu d'épaisseur, elles n'agissent que faiblement sur la lumière polarisée. Récemment, toutefois, à l'aide d'un excellent appareil polarisateur de Zeiss, et en employant la lumière concentrée d'une lampe, j'ai obtenu des images suffisamment nettes.

Les ondes de contraction qui parcouraient, ordinairement à des intervalles courts et réguliers, une fibre déterminée, étaient observées entre les nicols alternativement parallèles et croisés. Dans le premier cas, le stade d'homogénéité s'accusait très net-

tement; dans le second, on n'en remarquait aucune trace. On voyait alors seulement les bandes transversales foncées, qui correspondent à la substance isotrope, se rétrécir et se rapprocher, sans perdre, ne fût-ce qu'un instant, quelque chose de leur netteté.

L'observation se fait plus commodément sur des fibres musculaires un peu plus épaisses et à compartiments très hauts, telles que celles de l'Hydrophile, par exemple. L'épaisseur doit pourtant rester modérée, parce qu'autrement, dans le cas où la position des disques n'est pas exactement verticale, l'action optique de chaque couche n'est pas obtenue dans toute sa pureté, la substance isotrope, notamment, étant éclaircie par de la lumière provenant de parties biréfringentes. Mais, pourvu qu'au besoin on ne se lasse pas de recommencer sans cesse de nouvelles préparations, on finit par trouver des objets satisfaisant aux exigences les plus rigoureuses.

Les objets de cette espèce permettent aussi de constater, avec toute certitude, le dernier des faits que nous voulions signaler:

7) *Les bandes transversales du stade d'inversion, qui paraissent foncées à la lumière ordinaire, restent foncées entre les nicols croisés.*

On obtient surtout des images convaincantes en n'obscurcissant pas le champ visuel complètement, mais seulement jusqu'au point où les disques biréfringents commencent à répandre distinctement une lueur blanche, la fibre continuant du reste à faire encore la même impression que dans la lumière transmise ordinaire. La persistance des stries transversales dans le stade d'*homogénéité* se laisse alors aussi très bien observer. — A l'aide de lamelles de gypse très sensibles, j'ai également obtenu des images tout à fait instructives.

Lorsqu'on a des fibres vivantes dont les disques accessoires sont, à l'état de repos, plus foncés que les disques transversaux, il est encore beaucoup plus facile de s'assurer que les disques isotropes et les disques anisotropes restent, dans toutes les phases du raccourcissement, parfaitement distincts et, les uns et les

autres, à leur place respective. Bien entendu, il n'est pas question alors, même dans l'examen à la lumière ordinaire, de stades de transition et d'inversion. Les rapports de clarté restent qualitativement les mêmes dans toutes les phases. La phase doit être jugée d'après le degré du raccourcissement.

Tels sont environ, parmi les faits non généralement reconnus, les plus importants de ceux qui, d'après ma conviction, se laissent déjà constater, *avec une entière certitude*, sur la fibre musculaire vivante. Il s'agit maintenant de savoir si les procédés ordinairement employés pour fixer les ondes de contraction permettent aussi de vérifier ces faits. A cet égard, je pense qu'il ne peut subsister le plus léger doute, et même *je connais à peine, en ce moment, une tâche histologique plus facile que la démonstration de cette vérité.*

S'il existe encore, en quelques points, des divergences d'opinion au sujet des ondes de contraction fixées, la faute en est surtout aux objets d'étude. Ni les muscles de l'Hydrophile, ni ceux de l'Écrevisse, qui sont en faveur actuellement, ne répondent aux plus hautes exigences. Sauf dans quelques cas tout à fait isolés, ils sont trop épais. La séparation artificielle en faisceaux de fibrilles, qu'on doit leur faire subir notamment pour l'examen à la lumière polarisée, ne réussit pas toujours au degré voulu. Ainsi que l'a fait remarquer avec raison M. Nasse [1]), c'est précisément aux endroits contractés que les fibrilles adhèrent le plus fortement entre elles. Je ne conteste nullement, bien entendu, que tous les faits essentiels ne puissent être observés avec certitude sur de pareils objets. Je conteste seulement qu'il soit facile d'obtenir, avec eux, des préparations réellement probantes sous tous les rapports. On peut en dire autant des muscles de presque tous les autres Arthropodes, parmi lesquels j'ai étudié expressément, à ce point de vue, plus

---

[1]) *l. c.* p. 288.

de cent espèces, appartenant aux classes et aux familles les plus différentes. Il va de soi que les fibres des Vertébrés, à cause de l'étroitesse de leurs stries transversales, n'entrent pas en considération.

Jusqu'à présent, je n'ai trouvé qu'un seul objet sur lequel tous les phénomènes ci-dessus énumérés se laissent étudier en tout temps, sans aucune peine et de la manière la plus nette. Ce sont les muscles cutanés du *Telephorus melanurus*, que j'ai déjà signalés antérieurement et que je recommande de nouveau avec insistance. Pour ceux de mes confrères qui ne connaissent pas ce Coléoptère et qui voudraient le chercher eux-mêmes, je le représente sur la Pl. VII, fig. 8 (grandeur naturelle), en ajoutant que la tête, le corselet, les pattes et les élytres (sauf la pointe noire de ces derniers) sont d'un jaune brunâtre clair, l'abdomen de couleur jaunâtre, et que l'animal se trouve en été, dès le commencement de juin, dans les prés et sur les arbustes, de préférence sur les Graminées et les Ombellifères; il est commun dans presque toute l'Europe centrale, et en beaucoup d'endroits c'est même le Coléoptère le plus commun.

Ce qui rend les muscles de cet animal si précieux comme objets d'étude, c'est l'ensemble des circonstances suivantes. La largeur des bandes transversales y atteint la plus grande valeur connue, les fibres sont minces (0,01—0,06 mm.), les moins minces d'entre elles ordinairement plates, les plus minces généralement cylindriques, ce qui est entre autres très avantageux pour l'examen des phénomènes de polarisation. Elles se laissent très facilement isoler sans souffrir de dommage, et d'ailleurs, pour les étudier commodément, il n'est pas même nécessaire de les séparer des parois du corps. Toujours on trouve parmi elles, après que l'animal a été tué par l'immersion dans l'acide osmique à 0,5—1 %, dans l'alcool à 50—70 % ou dans l'acide salicylique concentré, un choix des plus belles ondes de contraction.

Voici comment je procède d'ordinaire pour la préparation. L'animal étant suffisamment durci dans un des liquides qui

viennent d'être nommés, j'enlève d'un coup de ciseaux la paroi dorsale ou ventrale de l'abdomen, sur une longueur d'environ 4 à 5 segments, et, au moyen d'un pinceau fin et doux, je débarrasse avec précaution la face interne de la pièce coupée, sous une couche d'alcool faible ou de glycérine étendue, des portions du contenu du corps (matières grasses, trachées etc.) qui y sont restées attachées et qui cachent les muscles cutanés. La coupe est alors inspectée à un grossissement faible (de 40—80 fois), — opération dans laquelle l'œil est immédiatement frappé par les minces couches de muscles cutanés à la face interne de la paroi abdominale, — puis elle est au besoin encore une fois nettoyée, de préférence sous le microscope simple avec le pinceau ou avec une aiguille, des débris de matières qui peuvent encore la souiller; on la divise ensuite en morceaux correspondants aux divers segments, ou bien on la laisse entière; on la colore, si l'on veut, par l'hématoxyline, l'éosine, la picrocarmine ou quelque autre substance; enfin on la plonge, soit dans un mélange d'eau et de glycérine, soit successivement dans l'alcool concentré, l'essence de térébenthine et le baume du Canada. C'est dans ce baume qu'on opère alors, sous le microscope simple et à l'aide d'aiguilles d'acier à pointe très effilée, la séparation des différentes fibres lâchement juxtaposées, opération qui ne présente aucune difficulté. Du reste, sans isoler les fibres, en portant les fragments cutanés tels quels sous le microscope, on trouve aisément quelques fibres dont les ondes de contraction se voient avec une netteté pleinement suffisante pour tous les besoins.

Quel que soit maintenant celui des liquides cités dont on a fait usage pour tuer les animaux, les faits que nous avons reconnus snr les fibres vivantes se retrouvent aussi sur nos préparations mortes et, dans tous les cas, avec des caractères essentiellement les mêmes. On ne peut donc pas douter que les méthodes usuelles de fixation ne fournissent, entre de larges limites, des images fidèles du processus physiologique. Naturellement, il existe pour chacun des réactifs employés de petites particularités, qui, tout en étant de nature secondaire, ont de

l'importance en ce qu'elles aident à expliquer les différences entre les résultats énoncés par les divers observateurs. Elles se rapportent presque exclusivement, nous devons le dire tout d'abord, à l'aspect des fibres dans la lumière ordinaire. A la lumière polarisée, les ondes fixées d'après les différentes méthodes montrent une concordance presque absolue, et ne présentent pas un seul fait qui soit en contradiction avec ce qu'on peut observer sur la fibre vivante, pendant qu'elle se contracte.

Ce sont les images obtenues au moyen de l'acide osmique convenablement étendu qui, abstraction faite de la couleur, se rapprochent généralement le plus de celles fournies par les fibres vivantes, sous le rapport de l'aspect dans la lumière transmise ordinaire. Le moyen le plus facile de s'en convaincre est de considérer des parties qui soient en repos ou peu contractées. Fréquemment, en ce cas, les rapports de clarté des différentes couches ne sont pas sensiblement changés. Surtout l'aspect des disques accessoires et des disques transversaux est presque toujours entièrement normal, ou peu s'en faut. En conséquence, les premiers paraissent beaucoup moins réfringents, plus mats, plus faiblement limités que les seconds et surtout que les disques intermédiaires, qu'ils joignent d'assez près. A cet égard, les préparations osmiques se distinguent ordinairement d'une manière tranchée des objets alcooliques, dans lesquels les disques transversaux et surtout les disques accessoires réfractent en général la lumière plus fortement qu'à l'état normal, et souvent la réfractent avec une force égale. En outre, dans ces objets alcooliques, l'espace compris entre le disque accessoire et le disque intermédiaire est proportionnellement plus élevé. La même chose s'observe aussi assez fréquemment sur les préparations salicyliques. Chez celles-ci, de plus, le fendillement fibrillaire est spécialement prononcé, comme M. Nasse l'a montré le premier.

En général, chez toutes les fibres qui dans ces diverses préparations présentent des ondes de contraction suffisamment énergiques et complètes, on retrouve sans peine, et déjà à un

grossissement de 80—100 fois, les trois stades distingués sur la fibre vivante: celui de début, celui de transition et celui d'inversion. Le stade d'inversion ne manque jamais quand le raccourcissement atteint ou dépasse 50 °/₀; le stade de transition suppose des raccourcissements d'au moins 25—30 °/₀. Ce dernier, d'ailleurs, fait aussi défaut (ou est à peine indiqué) pour des raccourcissements beaucoup plus considérables et allant jusqu'à l'inversion, quand l'onde est très courte et ne s'étend que sur un petit nombre de compartiments. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans le cas représenté fig. 4 (préparation osmique). Plus l'onde est allongée, plus le stade de transition est développé. Il peut alors occuper — et il en est de même du stade de début et du stade d'inversion — toute la longueur de la fibre. Ces derniers états correspondent le mieux aux phénomènes naturels, en tant que l'onde a été fixée ici pendant que sa vitesse de propagation était encore considérable. Les cas les plus avantageux pour l'étude, ou du moins les plus propres à donner un aperçu général du phénomène, sont ceux où l'on compte, depuis l'origine jusqu'au sommet de l'onde, une douzaine de compartiments: tels sont le cas de la fig. 2 et celui qui a été représenté dans mon premier travail (Pl. III).

Les ondes de contraction à marche dissymétrique, surtout celles où la valeur du raccourcissement est très différente aux deux côtés opposés de la même section transversale, offrent aussi un intérêt extraordinaire pour la connaissance des changements que la structure de la fibre subit pendant la contraction. Les cas de ce genre ne sont pas précisément rares chez le *Telephorus*.

La fig. 6 est copiée aussi fidèlement que possible d'après un de ces cas. Elle provient d'une fibre durcie dans l'alcool à 50 °/₀ et plongée dans du baume. Les trois compartiments figurés présentent un raccourcissement croissant de droite à gauche. En outre, le compartiment supérieur a éprouvé au total la contraction la plus faible, le compartiment inférieur la contraction la plus forte. Le premier offre à droite le stade de début, à gauche

en haut le stade d'homogénéité, à gauche en bas le stade d'inversion. Le compartiment moyen montre en haut à droite le stade de début, qui vers la gauche passe successivement aux stades de transition et d'inversion; en bas à droite un état qui précède immédiatement le second stade et qui, vers la droite, passe à celui-ci et ensuite au troisième stade. Dans le compartiment inférieur, les stades d'inversion et d'homogénéité commencent encore plus à droite.

Dans ses traits essentiels, cette image s'accorde très bien avec le schème déduit par M. Fredericq [1]) de ses observations sur l'Hydrophile, et passablement aussi avec une figure donnée par M. Merkel [2]).

Exceptionnellement on trouve parmi les fibres durcies, tout comme parmi les vivantes (voir plus haut), des cas où les couches isotropes, surtout les disques accessoires, sont, déjà à l'état de repos, plus foncées que les disques transversaux. Comme le montre la fig. 5, fournie par une préparation alcoolique, on n'observe alors rien qui ressemble à un stade d'homogénéité. La fibre apparaît, à tous les degrés de raccourcissement, distinctement striée en travers, même à la lumière transmise ordinaire; il ne peut donc être question non plus d'inversion. Des passages entre cet état et l'état ordinaire se rencontrent aussi, çà et là, dans les préparations durcies.

On voit que l'aspect homogène de la fibre n'est pas un signe absolu d'un certain degré de raccourcissement. Par contre, l'apparence décrite pour le stade d'inversion se trouve, sans exception, partout où les compartiments sont réduits par la contraction à environ la moitié de leur longueur dans l'état de repos, ou à moins encore.

En ce qui concerne le premier et le troisième des faits fondamentaux ci-dessus établis, règne donc l'accord le plus parfait entre l'aspect des fibres musculaires vivantes et celui des fibres

[1]) L. Fredericq, *Note s. l. contract. des muscles* etc. *Bull. Acad. roy. Belg.* 3 Mars 1876. Pl. IV, fig. 3.

[2]) *Archiv f. mikr. Anat.*, t. IX, pl. XIV, fig. 4.

durcies de la manière habituelle. Voyons maintenant s'il en est de même des autres faits.

Nous examinerons d'abord, attendu que l'observation en est plus simple et plus grossière, comment les stries transversales se comportent à la lumière polarisée. Or, un premier point de conformité consiste alors en ce que toutes les fibres durcies de *Telephorus*, qui présentent des ondes ou portions d'ondes bien développées, laissent reconnaître, avec la plus grande facilité, la *persistance de stries transversales bien distinctes dans toutes les phases du raccourcissement.* En particulier, les stries des stades d'homogénéité et d'inversion ne le cèdent en rien, sous le rapport de la netteté, à celles des parties non contractées.

Je note expressément qu'il ne s'agit pas ici de choses qu'on ne réussit à voir que de loin en loin, sur des préparations choisies ou par des moyens optiques spéciaux. Bien au contraire: on pourra chercher longtemps, chez le *Telephorus*, avant de trouver une partie qui ne les mette pas en pleine évidence, même avec un grossissement faible (150--200 fois) et avec un éclairage des plus ordinaires.

Il est de nouveau tout à fait indifférent que les fibres aient été tuées dans l'alcool, dans l'acide osmique ou dans l'acide salicylique, et qu'on les examine dans la glycérine ou dans le baume du Canada, avec ou sans coloration préalable (pas trop foncée, bien entendu). Combien sont grossières les relations dont il s'agit ici, c'est ce que montrent les fig. 1—6 de la pl. VII. Elles ont été dessinées, en ce qui concerne les rapports de clarté et les dimensions des différents compartiments et de leurs couches, avec toute la fidélité que j'ai pu atteindre. Chaque compartiment a été mesuré à part, au moyen du micromètre oculaire. La moitié gauche des fibres a été dessinée, dans les fig. 1—6, telle qu'elle apparaissait à la lumière transmise ordinaire, la moitié droite, telle que la montrait la lumière polarisée. De même, la fig. 6.*b* représente vus entre les nicols croisés les trois compartiments que la fig. 6.*a* montre dans la lumière ordinaire. Les fig. 1 et 4 se rapportent à des préparations qui avaient été

traitées par l'acide osmique, les fig. 2, 4 et 6 à des préparations alcooliques, la fig. 3 à une préparation salicylique.

Quelques auteurs affirmant encore, à la suite de M. Merkel, que dans le stade de transition la substance anisotrope s'étend jusqu'aux disques intermédiaires et remplit par conséquent l'espace entier ou presque entier du compartiment musculaire, je dois faire remarquer que toutes mes préparations sont contraires à cette assertion. Or, on ne saurait méconnaître la signification de cette circonstance: que l'opinion en question est absolument incapable d'expliquer les images que j'ai obtenues, tandis que la mienne rend très facilement compte des observations adverses.

L'erreur provient, j'en suis convaincu, de deux sources principales. D'abord, les fibres employées ne convenaient pas pour une étude précise à la lumière polarisée, parce que, avec une épaisseur trop forte, leurs compartiments n'avaient pas une situation exactement verticale, et probablement aussi, en partie, parce que les stries transversales étaient trop étroites. Ceci n'est pas une simple conjecture, mais repose sur l'étude directe de quelques-uns des objets qui ont donné lieu à l'opinion que je combats. Chacune des circonstances, qui viennent d'être indiquées, suffit évidemment à expliquer comment la fibre peut paraître uniformément biréfringente dans le stade d'homogénéité, alors même qu'en réalité les couches à réfraction simple et à réfraction double alternent régulièrement entre elles.

En second lieu, on s'est indubitablement laissé égarer par l'aspect des fibres à la lumière ordinaire. Cet aspect, il faut en convenir, est fréquemment si trompeur et en apparence si concluant, qu'on croit pouvoir se passer du secours de l'appareil polarisateur, et qu'en fait on s'en est passé maintes fois. Mais, c'est ici précisément que le microscope polarisant trouve son plus beau triomphe, comme on le verra encore mieux tout à l'heure.

Sans aucun doute, l'image que présentent les fibres dans le stade de transition *à la lumière ordinaire* est la plus variable de toutes, et en général aussi, à cause du décroissement de

toutes les différences de clarté, la plus difficile à déchiffrer. Pour cette raison, c'est justement à ce sujet que les avis diffèrent le plus. Avec les préparations fournies par le *Telephorus*, on peut aussi, suivant le mode de traitement, le réactif employé, l'état dans lequel se trouvent les fibres lors du contact avec le réactif, etc., obtenir des images très différentes. Mais, par suite des excellentes qualités de ces préparations, on n'éprouve jamais la moindre difficulté à se faire une idée nette de chacune d'entre elles.

Je décrirai plus spécialement les préparations osmiques, parce qu'elles me paraissent, en général, rendre les phénomènes normaux avec le plus de fidélité. Il va de soi qu'on doit s'en tenir aux fibres peu colorées. Quand l'action de l'acide a été trop forte ou trop prolongée, les fibres deviennent d'un noir uniforme et par suite complètement opaques.

On peut distinguer deux types d'aspect, qui du reste passent fréquemment l'un à l'autre. Du premier type, qui paraît se rapprocher le plus des conditions normales, et qui se rencontre aussi çà et là parmi les préparations salicyliques et alcooliques, la fig. 1 représente un exemple. Quant aux traits essentiels, cette figure est conforme à celle que j'ai donnée antérieurement [1]). Dans le stade de début, le disque intermédiaire est le plus foncé, puis viennent les disques transversaux. Les disques accessoires se montrent assez pâles, et séparés du disque intermédiaire par une strie claire étroite, des disques transversaux par une strie claire plus large. A mesure que le raccourcissement augmente, les disques intermédiaires et accessoires deviennent plus minces et se rapprochent davantage. Les disques transversaux s'éclaircissent, manifestement à partir de la substance isotrope, qui de son côté se fonce légèrement, mais distinctement. De cette manière, les limites des deux couches se fondent plus ou moins. L'impression reçue, c'est que la bande transversale foncée, qui répond à la substance biré-

[1]) *l. c.*, pl. III, fig. 1.

fringente, en même temps que ses limites s'effacent, se rétrécit de plus en plus, jusqu'à être réduite à un mince trait nébuleux au milieu du compartiment, trait qui disparaît à son tour par les progrès du raccourcissement. La couche anisotrope est alors très notablement plus claire qu'à l'état de repos. En même temps, la strie foncée, qui correspond aux disques intermédiaires et accessoires réunis, semble être devenue un peu plus large et surtout plus foncée que dans le stade précédent.

Voilà pour ce qui concerne l'aspect de la fibre à la lumière transmise ordinaire. Le microscope polarisant montre simplement, dans la fig. 1, qu'à mesure que la fibre se raccourcit, *les disques isotropes et anisotropes décroissent en hauteur, les premiers généralement beaucoup plus vite que les seconds, surtout au début.* Au sommet de l'onde, pour un raccourcissement total notablement supérieur à la moitié de la hauteur primitive des compartiments, la couche isotrope n'a plus qu'environ $\frac{1}{7}$ de sa hauteur initiale, la couche anisotrope un peu moins de la moitié.

Le volume des compartiments, qui se laissait facilement calculer, vu qu'en roulant la fibre on reconnaissait que celle-ci était cylindrique, n'avait pas diminué d'une manière appréciable pendant la contraction; il en résulte immédiatement, que *la couche anisotrope avait très notablement gagné en masse aux dépens de la couche isotrope* [1]).

Tous les détails de la fig. 1 montrent, d'une manière pour ainsi dire palpable, qu'il s'agit ici d'un gonflement graduel de

[1]) Ce résultat est confirmé par de nombreuses mesures faites sur d'autres fibres aussi rapprochées que possible de la forme cylindrique. Comme beaucoup de fibres possèdent, déjà à l'état de repos, une épaisseur inégale en des points différents de leur longueur, les mesures de volume demandent des précautions spéciales. Presque toujours ce sont seulement des fibres très plates qui ont, dès l'état de repos, un diamètre varié. Je ferai remarquer, incidemment, que M. Krause s'est trompé en supposant (Pfluger, *Archiv* t. VII, p. 511) que la fibre représentée par moi (*l. c.*, pl. III) était fortement aplatie. Elle était au contraire, comme il ressort d'ailleurs clairement du texte, remarquablement cylindrique.

la substance anisotrope, aux dépens de l'eau de la substance isotrope.

Notre fig. 1 s'accorde très bien avec le schème construit par M. Fredericq (*l. c.*, fig. 3 et 4) d'après des préparations alcooliques d'*Hydrophilus*. Cela s'applique surtout aux apparences observées dans la lumière polarisée: la persistance d'une séparation tranchée entre les substances monoréfringente et biréfringente dans tous les stades du raccourcissement, et la rapidité inégale avec laquelle décroît l'épaisseur de ces deux couches, sont parfaitement exprimées dans le schème de M. Fredericq. La différence principale est offerte par sa fig. 3 (lumière ordinaire), où la couche isotrope comprise entre les disques accessoire et transversal a encore conservé son épaisseur et sa clarté, alors que les disques accessoires sont déjà réunis avec le disque intermédiaire en une membrane mince d'apparence simple, et que le raccourcissement total est déjà très considérable. Pour moi, je trouve presque constamment la couche isotrope, entre les disques transversal et accessoire, déjà obscurcie sensiblement, sinon très notablement, même dans des fibres qui n'ont subi qu'une coloration très légère par l'acide osmique ou l'hématoxyline. Selon toute probabilité, la cause de cette différence réside en majeure partie (outre la différence des réactifs employés) dans l'épaisseur plus grande des fibres (*Hydrophilus*) utilisées par M. Fredericq. La théorie enseigne et l'expérience confirme que, l'épaisseur des fibres croissant, les différences de clarté des diverses couches doivent d'abord devenir plus prononcées.

Le second type d'aspect des préparations osmiques ressemble presque entièrement à celui qu'on rencontre le plus fréquemment parmi les préparations alcooliques et aussi (abstraction faite du fendillement fibrillaire) parmi les préparations salicyliques. Les fig. 4 (acide osmique), 2 et 6 (alcool) et 3 (acide salicylique) en donnent une idée. Remarquons, tout de suite, que le schème tracé par M. Nasse [1]), d'après des préparations salicyliques, cadre parfaitement avec ces figures.

[1]) *l. c.*, p. 288.

Le trait caractéristique de ce type, pour ce qui concerne l'aspect à la lumière ordinaire, consiste en ce que les disques accessoires paraissent d'abord se fondre avec les disques transversaux en une seule masse, la couche claire isotrope qui les sépare devenant (avec ou sans obscurcissement simultané) de plus en plus étroite et enfin invisible. On voit formellement la substance isotrope être absorbée graduellement par la substance anisotrope. Pendant ce temps, la couche isotrope qui se trouve entre le disque accessoire et le disque intermédiaire ne montre presque pas de changement: sa hauteur diminue d'une manière à peine perceptible et sa clarté reste la même. Il peut ainsi se faire que la fibre, quand le raccourcissement est encore médiocre, présente des bandes transversales foncées extrêmement larges, alternant avec des stries claires très étroites, qui sont divisées par le disque intermédiaire mince et foncé [1]).

En même temps que les disques transversaux et accessoires se rapprochent les uns des autres, *les premiers commencent à devenir plus clairs.* Ainsi se confirme ce qu'avait appris l'étude des fibres vivantes et des préparations du premier type. Souvent les disques transversaux, au moment où ils touchent les disques accessoires, sont très notablement plus clairs que ceux-ci, bien

[1]) Par erreur, j'avais d'abord regardé ce schème comme une apparence particulière de la substance musculaire *en repos* (*l. c.*, p. 50, pl. II, fig. 16 et 17), quoique j'eusse déjà correctement observé et figuré (*l. c.*, p. 50 et 51, pl. II, fig. 16—19), sur la même fibre, les passages entre ce schème et le schème normal de l'état de repos, ainsi que l'aspect dans la lumière polarisée.— Je crois utile de faire encore remarquer ici que, dans les préparations qui ont séjourné un peu longtemps (au moins quelques jours) dans l'alcool, la couche isotrope est aussi habituellement réduite, et tout particulièrement dans les fibres ou parties de fibres qui ne sont pas contractées. Les disques biréfringents, qui en ce cas réfractent la lumière avec beaucoup de force et sont ordinairement devenus, comme la fibre entière, très friables, se trouvent alors parfois en contact presque immédiat, ainsi que le montre le microscope polarisant. On doit bien se garder de confondre ces apparences avec celles, ci-dessus décrites, du stade de transition; le microscope polarisant dévoile immédiatement l'erreur. De ce qui vient d'être dit, découle le précepte de ne tirer de préparations que d'animaux fraîchement tués.

qu'ils fussent plus foncés auparavant (comp. Pl. VII, fig. 1, 3—6, 6.*a*, et en outre Pflüger's *Archiv*, t. VII, Pl. II, fig. 17, et le schème de M. Nasse). Il n'est toutefois pas rare non plus, comme nous l'avons déjà dit, que les deux sortes de disques possèdent, à l'instant du contact, un pouvoir réfringent égal. Dans ce cas, ils sont aussi colorés d'une manière tout à fait uniforme par l'acide osmique, l'hématoxyline, l'éosine, etc. (v. Pl. VII, fig. 2.*e*). L'illusion, qui porte à croire que la substance biréfringente occupe presque toute la capacité du compartiment musculaire, est alors à son comble. Mais elle s'évanouit quand qu'on a recours à l'appareil de polarisation. La substance biréfringente se montre aussitôt très notablement plus étroite que la large bande foncée qu'on avait regardée comme telle. Je renvoie aux fig. 2.*e*, 3.*b*, 4.*e*, 6.*a* et *b*. La même observation, sans aucun doute, aurait pu être faite sur les fibres servant de base au schème de M. Nasse. A priori, en effet, il est extrêmement probable qu'il ne s'agit pas ici de choses pouvant se présenter de telle façon chez une espèce de muscles, et de telle autre chez une espèce différente; ensuite, comme surcroît de preuves, j'ai constaté directement les mêmes phénomènes chez les muscles de l'intestin et des extrémités de *Musca domestica* et *vomitoria*, ainsi que chez divers muscles d'autres insectes (*Hydrophilus*, *Geotrupes stercorarius*, *Vespa crabro*, *Formica*, etc.).

A cette occasion, je dois rectifier une assertion inexacte de M. Merkel, malheureusement déjà passée dans quelques traités d'histiologie, suivant laquelle la coloration par l'hématoxyline fournirait un moyen sûr pour reconnaître la substance biréfringente. En s'appuyant sur cette assertion, et en partant d'un fait exact, à savoir que dans le stade de transition la fibre se colore très uniformément en violet, on tire la conclusion fausse que pendant ce stade la substance anisotrope est répandue dans tout le compartiment musculaire. Mais le fait invoqué ne prouve absolument que ceci: que dans le stade en question la teneur en eau de la fibre, sa densité, est devenue très uniforme. Depuis

longtemps, en effet, on sait que de cette condition dépend essentiellement l'intensité de la coloration qu'un élément organisé prend sous l'action d'un agent tinctorial [1]). Bien que cette règle puisse être vérifiée journellement par l'observation, elle paraît, chose assez singulière, être tombée un peu dans l'oubli. Le cas actuel la confirme de nouveau de la manière la plus nette. Dans la mesure où, pendant la contraction, la substance biréfringente gagne en volume et perd en pouvoir réfringent, dans cette même mesure elle subit une coloration moins intense. Lorsque, comme il arrive parfois, les disques accessoires sont, déjà à l'état de repos, plus réfringents et par conséquent moins imbibés d'eau que les disques transversaux, ils empruntent aussi à l'hématoxyline une couleur moins foncée. Un parail cas est représenté dans la fig. 5. La fibre avait été fixée dans l'alcool, puis colorée dans l'hématoxyline. A chaque degré du raccourcissement, la substance biréfringente est ici d'une couleur beaucoup plus foncée que la substance isotrope des disques accessoires. Là où le stade d'homogénéité est bien développé et où la fibre semble d'un violet tout à fait uniforme, le microscope polarisant montre, comme d'ordinaire, l'alternance de bandes foncées et claires parfaitement

---

[1]) Cela ne veut nullement dire, bien entendu, qu'il ne puisse exister, en outre, des différences de coloration spécifiques. Dans la plupart des cas, toutefois, il n'est pas nécessaire d'y avoir recours pour l'explication des faits, et par conséquent on ne doit les admettre qu'avec une extrême réserve. Là où elles ne peuvent être méconnues, il y a ordinairement des différences chimiques très notables. En cas de différences légères dans la structure chimique, lorsqu'il ne s'agit par exemple que des diverses modifications de l'albumine, comme c'est évidemment le cas pour le muscle, la coloration artificielle est rarement de quelque secours pour la diagnose différentielle d'objets renfermant une proportion d'eau sensiblement égale. Il en est autrement, sans doute, quand il y a des différences chimiques importantes, quand on cherche, par exemple, à distinguer des éléments dont les uns sont riches et les autres pauvres en matières grasses. En dépit, ou plutôt à cause même de ces difficultés, les recherches tendant à trouver des moyens de coloration spécifiques, pour des éléments histologiques peu différents sous le rapport chimique, doivent être pleinement approuvées, et on ne peut que leur souhaiter le meilleur succès.

tranchées. Je n'ai qu'à renvoyer à la fig. 2. *f*, *g*, etc. Les bandes foncées du stade d'inversion, qui offrent aussi la coloration violette la plus foncée, restent foncées entre les nicols croisés, comme nous l'apprend entre autres la fig. 2. *m*, *n*, *o*, *p*. — Ce qui est vrai de l'hématoxyline l'est aussi pour l'acide osmique, l'éosine, la picrocarmine et le vert de méthyle, que j'ai tous étudiés à ce point de vue. *On ne connaît, en ce moment, aucun agent de coloration réellement spécifique pour la substance contractile.*

Pour en revenir aux deux types que nous avons distingués dans les schèmes du stade de transition, on voit, comme résultat de ce qui précède, qu'ils ne diffèrent qu'en un petit nombre de points relatifs au développement de ce stade, et que cela même ne s'applique qu'à l'examen à la lumière ordinaire. Tous les deux nous montrent, ce qu'avait déjà appris l'observation de la fibre vivante, que le pouvoir réfringent moyen de la couche isotrope augmente, tandis que celui de la couche anisotrope diminue. Tous les deux s'accordent aussi à faire voir que, parallèlement aux changements optiques, les deux couches éprouvent des changements de volume, la couche anisotrope et contractile accroissant sa masse aux dépens de la couche isotrope et non contractile.

Quand la fibre est arrivée au stade suivant, celui d'inversion, il n'existe plus aucune différence sensible entre les deux images. Dans les deux cas, à mesure que le raccourcissement a fait des progrès, la couche isotrope est devenue plus réfringente et plus petite, la couche anisotrope moins réfringente et plus volumineuse. Par conséquent aussi, dans les deux cas, *les disques foncés du stade d'inversion correspondent à la substance isotrope*, ce qui est encore conforme à ce que montre la fibre vivante, mais contraire à l'assertion de M. Merkel.

Je suis d'accord sur ce point avec M. Flögel, qui le premier a découvert et en somme décrit correctement le fait important de l'inversion, ainsi qu'avec MM. Krause, Fredericq, Nasse et autres. Ce dernier observateur, qui appelle les disques foncés du

stade d'inversion „disques de contraction" [1]), s'éloigne de moi en ce qu'il laisse la substance biréfringente s'étendre d'abord jusqu'aux disques intermédiaires mêmes, puis se retirer de nouveau vers le milieu du compartiment au fur et à mesure que se développent les „disques de contraction". En opposition avec cette manière de voir, je dois déclarer encore une fois, de la façon la plus catégorique, que dans aucune de mes préparations on ne voit rediminuer le volume des couches biréfringentes, ou réaugmenter le volume des couches monoréfringentes, pendant que le raccourcissement s'accentue. Non-seulement les changements optiques, mais aussi les changements de volume s'opèrent, dans chacune des deux espèces de couches, toujours dans le même sens, aussi longtemps que la contraction fait des progrès. Je renvoie aux fig. 1—6, qui sous ce rapport sont en concordance parfaite entre elles. Tout ce qu'on peut concéder, c'est que dans les phases ultérieures du raccourcissement les susdits changements marchent avec plus de lenteur. En outre, si, *après que le stade d'inversion a commencé*, le raccourcissement augmente encore beaucoup, les changements optiques et de volume des deux couches ne se laissent finalement plus constater avec certitude. Vu la faible hauteur qu'ont alors les compartiments musculaires, il n'est plus possible d'exécuter des mesures exactes. Cependant, même alors, les changements *paraissent* encore se continuer dans le sens initial.

Sur la fibre *vivante*, je n'ai pu jusqu'ici m'assurer suffisamment des variations compensatrices du volume des couches isotropes et anisotropes, ce qui n'a rien d'étonnant en présence de l'extrême difficulté de l'observation. Toutefois, les apparences parlent très décidément en faveur d'un rétrécissement plus considérable des bandes isotropes, et, à la lumière polarisée, la fibre paraît aussi, au total, beaucoup plus claire au sommet de l'onde que dans les parties à l'état de repos. Au surplus, il importe fort peu que la preuve irrécusable puisse être donnée

[1]) *l. c.*, p. 289.

sur l'objet vivant, puisque nous avons trouvé que tous les faits dont la fibre vivante permet la constatation certaine peuvent aussi, sans exception, être observés sur les ondes fixées par les méthodes ordinaires.

En résumé, je regarde les faits suivants, qui ne sont pas encore généralement reconnus, comme pleinement démontrés, à ce point que, pour moi, ils se rangent parmi les vérités les plus solidement établies de l'histologie:

Pendant la contraction des fibres musculaires striées en travers, il se produit, parallèlement aux changements de forme des éléments musculaires, des changements dans les propriétés optiques et le volume des couches isotrope et anisotrope.

Ces changements sont de nature opposée pour les deux couches.

La couche isotrope, dans son ensemble, devient plus réfringente, la couche anisotrope moins réfringente.

Par suite, à un certain degré de raccourcissement, la fibre, vue à la lumière ordinaire, peut paraître homogène, sans stries transversales appréciables: stade d'homogénéité ou de transition.

Le raccourcissement étant poussé plus loin, on voit reparaître des stries transversales, qui correspondent aux disques isotropes.

A une phase quelconque du raccourcissement, par conséquent aussi dans le stade de transition, les substances isotrope et anisotrope peuvent être reconnues, au moyen du microscope polarisant, comme des couches nettement limitées, régulièrement alternantes.

Elles n'échangent pas, lors de la contraction, leurs places respectives dans le compartiment musculaire.

La hauteur des deux couches décroît pendant la contraction, celle de la couche isotrope beaucoup plus rapidement que celle de la couche anisotrope.

Le volume total de chaque compartiment ne varie pas sensiblement durant la contraction.

Les couches anisotropes augmentent donc de volume aux dépens des couches isotropes.

De ce fait, mis en rapport avec les phénomènes optiques et avec les phénomènes mécaniques que j'ai décrits antérieurement, il suit que, lors de la contraction, du liquide passe de la couche isotrope dans la couche anisotrope. La première se resserre, la seconde se gonfle.

Je ne m'étendrai pas ici sur la signification théorique de ces faits, dans lesquels se trouve, d'après ma conviction, la clef pour l'explication du phénomène de la contraction; à cet égard, je me permets de renvoyer aux indications que j'ai données dans des Mémoires antérieurs [1]).

---

[1]) *Mikroskopische Untersuchungen über die quergestreifte Muskelsubstanz. Zweiter Artikel. Die thätige Muskelsubstanz* (Pflüger's *Archiv*, t. VII, 1873, p. 176 et suiv.). — *Contraktilität und Doppelbrechung* (*ibid.* t. XI, 1875, p. 460 et suiv.).

EXPLICATION DES FIGURES DE LA PLANCHE VII.

Les figures 1—6 ont été faites à l'aide d'un système d'immersion N°. III (correspondant à L du Catalogue de 1878) de Zeiss de Jena. Ce système, au-dessus de tout éloge, permettait d'employer des verres épais pour couvrir les objets, et laissait déjà reconnaître à la lumière d'une lampe à gaz ordinaire, avec une netteté parfaite, les phénomènes de polarisation des fibres musculaires. Le grossissement des figures est d'environ 1500 fois. Du reste, des objectifs beaucoup plus faibles (par exemple, DD de Zeiss, N°. 7 de Hartnack) suffisent pour constater tout ce qui est figuré ici.

Toutes les figures se rapportent à des fibres de *Telephorus melanurus*.

Fig. 1. Préparation osmique. Premier type.

„ 2. Préparation alcoolique, colorée par l'hématoxyline.

„ 3. Préparation salicylique. On n'a figuré que trois portions de la fibre (*a*, *b*, *c*), correspondant aux 3 stades différents. *a*. Stade de début. *b*. Stade de transition (encore incomplètement développé): les éléments des disques accessoires sont confondus en apparence avec les éléments biréfringents (*sarcous elements*). Ces derniers sont déjà devenus plus clairs et plus épais. *c*. Stade d'inversion.

„ 4. Préparation osmique. Second type. Les disques biréfringents sont, dans le stade de début, singulièrement bas. Cela n'est nullement la règle.

„ 5. Préparation alcoolique, colorée par une solution d'hématoxyline. Les disques accessoires sont, déjà dans le stade de début (dont d'ailleurs la fin seulement est représentée), plus foncés que les couches biréfringentes. Ces dernières sont, dans tous les compartiments, les parties le plus faiblement colorées.

„ 6. Préparation alcoolique. Contraction asymétrique. Les 3 stades juxtaposés dans le même compartiment et passant insensiblement l'un à l'autre. Pour les détails, voir le texte.

„ 7. Schème d'un compartiment musculaire dans les trois stades: *a*. de repos, *b*. de transition, *c*. d'inversion.

„ 8. *Telephorus melanurus*, grandeur naturelle.

SUR DES

TOURBIÈRES D'EAU SAUMÂTRE,

PAR

F. SEELHEIM.

Tous ceux qui se sont occupés des formations géologiques les plus récentes s'accordent à penser que les tourbières, qui sont d'origine aquatique, ne peuvent se former que dans l'eau douce. Cette opinion repose sur l'observation que les débris végétaux dont la tourbe est composée proviennent essentiellement de plantes vivant dans les eaux de cette espèce.

L'examen de la couche de tourbe ou de *derri* qui s'étend sous le sol de la Zélande avait paru confirmer l'opinion que je viens de rappeler. Mais, en l'admettant, on se trouvait conduit à des conséquences si improbables, que des doutes sérieux s'élevèrent dans mon esprit et me firent soupçonner une erreur dans les idées courantes au sujet de l'origine de cette formation tourbeuse.

Lorsqu'il y a opposition entre une observation exacte et les conséquences qui s'en déduisent, on finit ordinairement par reconnaître une vérité nouvelle, dans laquelle se résout l'apparente contradiction.

Je vais examiner ici les raisons qui plaident soit pour l'opinion régnante, soit pour l'opinion contraire, en ce qui concerne le mode de formation de la couche de tourbe de la Zélande; de cet

examen ressortira, je pense, la conclusion que cette tourbe a pris naissance dans l'eau saumâtre.

La tourbe en question se trouve dans l'île de Walcheren, entre les bras occidental et oriental de l'Escaut; elle y forme une couche continue, que les travaux de canalisation ont mise à découvert sur une grande étendue, à Flessingue, à Middelbourg et à Veere. On ne sait pas au juste jusqu'où elle se prolonge vers l'ouest; toutefois, elle n'existe plus, que je sache, près de Domburg, où elle n'est jamais apparue au jour à la suite des érosions subies par les dunes.

On a aussi trouvé cette couche tourbeuse près de Borsselen, Bruinisse, Stavenisse et sur toute l'île de Sud-Beveland, ainsi que dans l'île de Schouwen, de sorte qu'elle couvre une grande partie de la province, entre les différents bras des fleuves. La couche est épaisse de 1 à 1½ mètres et a une forme légèrement convexe, sur laquelle j'ai donné ailleurs des renseignements précis [1]). Elle repose sur une mince couche d'argile renfermant des coquilles marines, laquelle à son tour est assise sur une puissante couche de sable meuble diluvien; la tourbe est recouverte de couches de sable et d'argile, dans lesquelles on rencontre également des coquilles marines. La surface supérieure de la couche de tourbe se trouve, en différents points de ses extrémités près des rives des fleuves, à un niveau de 1,7 à 3,3 mètres au-dessous de A P (zéro de l'échelle d'Amsterdam). Ailleurs j'ai expliqué cette différence par des affaissements dus à l'action des fleuves, qui dans quelques-unes de leurs parties atteignent une profondeur de 32 mètres [1]); il est probable qu'à l'origine la couche avait une position sensiblement horizontale.

La tourbe retirée de cette couche n'est pas très propre au chauffage, attendu qu'elle donne ordinairement beaucoup de cendres; pourtant elle a servi autrefois, avant la suppression de l'impôt sur le sel en Angleterre, comme combustible pour l'ex-

---

[1]) Voir: *De putboringen in Zeeland.*

traction du sel de l'eau de mer. Les cendres de la tourbe contenaient elles-mêmes du sel, parce que l'eau de la mer pénétrait par les embouchures des fleuves dans la couche tourbeuse; aussi ces cendres étaient-elles lessivées pour en retirer le sel. De grands amas de ces cendres lessivées se trouvent près de Zierikzée, où on les vend sous le nom de *zelkasch* (charrée) aux fabriques de verre, ce qui fournit à la ville une ressource assez importante.

La masse végétale, dont cette couche de tourbe est formée, paraît provenir principalement de plantes du genre des roseaux, comme l'indiquent très clairement, malgré leur état avancé de ramollissement et de décomposition, les portions de tiges et de feuilles à nervures parallèles qui composent la masse. Ce sont surtout les débris du roseau commun (*Arundo Phragmites*) qui paraissent en constituer l'élément essentiel.

Cela est aussi confirmé par la composition de la charrée. D'après une étude que j'en ai faite antérieurement, cette charrée consiste principalement en silice amorphe très divisée, et c'est précisément là ce qui la fait rechercher pour la fabrication du verre, cette fine silice entrant facilement en fusion avec l'alcali et la chaux. Quant à de l'alcali, la charrée n'en contient plus en quantité tant soit peu notable. Si l'on considère maintenant le résultat des analyses des cendres de l'*Arundo Phragmites*, analyses que je communiquerai plus loin, on voit que ces cendres, après avoir été épuisées par l'eau, doivent également laisser un résidu formé, en majeure partie, de silice amorphe. La composition de la charrée vient donc à l'appui de l'opinion que les matériaux de notre couche tourbeuse ont été fournis par des roseaux. Il est vrai que les Caricées et les Joncées renferment aussi beaucoup de silice, mais je n'ai pas trouvé ces plantes dans la couche en question; elles font au contraire partie de la tourbe qui se forme dans les vallons des dunes, tourbe dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

Çà et là on trouve, disséminés dans la couche, des fragments de branches d'arbres; quant à des troncs entiers, on n'en a pas découvert. Des arbres de près d'un pied de diamètre, à racine et tronc dépouillés de branches, se rencontrent bien, enfouis

sous le sable, dans les embouchures actuelles des rivières, ou près de ces embouchures; mais ces arbres ont été entraînés et déposés par les cours d'eau, et n'ont aucun rapport avec la couche de tourbe.

Des coquilles ne peuvent exister longtemps dans une couche de tourbe, attendu qu'elles sont détruites par l'acide carbonique qui s'y développe incessamment.

Il n'est pas douteux que la couche tourbeuse se soit formée sur place: c'est ce que démontrent sa disposition régulière et la netteté de sa séparation d'avec les couches situées au-dessous et au-dessus. Si les atterrissements d'une ou de plusieurs rivières lui avaient donné naissance, ils auraient dû produire des superpositions de couches alternatives de tourbe et de matières terreuses, ainsi que des accumulations locales, circonstances qui n'existent pas.

Lorsqu'on part de l'opinion que la tourbe se forme exclusivement dans l'eau douce, on est obligé d'expliquer comment la couche tourbeuse peut se trouver si près de la mer dans la zone d'action des marées, et recouverte et supportée par des dépôts marins. A cet effet, il faut chercher des analogies en d'autres lieux et créer des hypothèses capables de résoudre l'énigme.

Avant d'entrer dans cette voie, toutefois, on doit se demander s'il est bien certain que la couche de la Zélande soit une formation d'eau douce? En d'autres termes: si l'*Arundo Phragmites*, dont les débris en constituent l'élément essentiel, est une plante d'eau douce?

Ordinairement, en effet, cette plante croît dans les milieux de cette nature, et je communique ci-dessous une analyse de roseaux qui s'étaient développés dans de l'eau ne contenant que 0,04 pour cent de matières solides.

En cherchant si elle n'existerait pas aussi dans l'eau salée, je vis d'abord, à côté du nouveau canal maritime coupant l'isthme de la Hollande, une luxuriante végétation d'*Arundo* dans de l'eau mixte, qui contenait 7—8 pour cent d'eau de mer.

Plus tard, je trouvai cette espèce développée avec une pro-

fusion extraordinaire dans l'eau même dudit canal, à environ ½ lieue à l'est de Velzen. L'eau, puisée en divers points entre les roseaux, contenait 29,1, 30,4, 30,1 et 24,7 pour cent d'eau de mer, en admettant que 3,25 pour cent de sel = 100 pour cent d'eau de mer. Les roseaux, en cet endroit, formaient de véritables forêts dans le canal et atteignaient une hauteur de 3 mètres. Sur les parties submergées de beaucoup de tiges étaient attachées des Balanes, Crustacés qui vivent aussi, comme on sait, dans l'eau saumâtre.

On pourrait supposer, à la vérité, que le *Phragmites* avait crû dans l'eau douce, à laquelle l'eau de mer ne serait venue se mêler que plus tard. Pour décider jusqu'à quel point les éléments de l'eau de mer deviennent des composants des plantes elles-mêmes, j'ai exécuté quelques analyses de cendres provenant d'*Arundo Phragmites* de diverses stations. Avant de faire connaître les résultats de ces analyses, je crois devoir indiquer la méthode par laquelle ils ont été obtenus.

Les plantes, arrachées avec leurs racines, étaient d'abord brossées dans de l'eau de pluie, pour les débarrasser de leur enduit argileux, puis on les lavait à l'eau de pluie jusqu'à ce que celle-ci ne donnât plus la réaction du chlore, afin d'enlever tous les éléments salins qui pouvaient encore y adhérer.

Les plantes étaient alors séchées, d'abord à l'air, puis à la température de 100°, après quoi on incinérait 100 grammes de la substance parfaitement sèche. On reconnut plus tard que la cendre contenait encore toujours une quantité appréciable d'argile et de sable qui n'avaient pas été enlevés par le lavage. Comme il est certain que ces éléments n'appartiennent pas à la cendre, ils ont été déduits de la quantité totale de cette dernière.

L'analyse des cendres avait lieu de la manière suivante:

Pour doser les alcalis, une partie de la cendre était traitée par l'acide chlorhydrique; on évaporait, on redissolvait le résidu dans l'eau, on ajoutait de l'hydrate de baryte pur jusqu'à réaction alcaline, et on filtrait; après que tout le baryum de la liqueur filtrée avait été précipité par le carbonate d'ammoniaque, on ajoutait

de l'acide chlorhydrique et on évaporait de nouveau à siccité. Le mélange de chlorures alcalins anhydres ainsi obtenu était pesé, puis on y déterminait le potassium à l'aide du chlorure de platine, tandis que, de la liqueur alcoolique séparée du chlorure platinico-potassique, on retirait aussi — par évaporation avec l'acide oxalique, calcination, traitement par l'acide chlorhydrique et évaporation — le sodium, à l'état de chlorure sodique cristallisé en hexaèdres.

Le chlore était dosé dans la solution aqueuse par voie de titrage, et aussi par la pesée du chlorure d'argent, procédés qui donnèrent des résultats identiques.

Pour doser l'acide silicique, l'acide sulfurique et la chaux, une certaine quantité de cendre était bouillie, à différentes reprises et pendant longtemps, avec une solution de carbonate de potasse préparé au moyen de l'oxalate de potasse; la liqueur filtrée était évaporée avec HCl, puis on séparait l'acide silicique et dans la liqueur on dosait l'acide sulfurique. La partie insoluble dans K_2CO_3 était attaquée par l'acide chlorhydrique, ce qui donnait une solution servant au dosage de la chaux, de la magnésie et de l'oxyde de fer. L'acide phosphorique d'une portion particulière de cendre était précipité au moyen de l'acide molybdique (MO^3), puis pesé à l'état de $Mg_2P_2O_7$:

100 grammes du *Phragmites* croissant dans l'eau du canal près de Velzen, eau qui contenait 30 % d'eau de mer, donnèrent 4,44 de cendres.

100 parties de ces cendres fournirent:

Sodium	10,86
Chlore	13,39
Potasse	15,19
Chaux	2,46
Magnésie	2,77
Oxyde de fer (+ un peu d'alumine)	1,24
Acide silicique	40,76
„ phosphorique	7,43
„ sulfurique	5,12
	99,22

100 grammes de cendres du *Phragmites* croissant dans l'eau douce d'un fossé sur la route d'Utrecht au Bilt, eau qui contenait 0,04 % de matières solides, fournirent:

Sodium	0,27
Chlore	2,48
Potasse	22,01
Chaux	3,71
Magnésie	3,16
Oxyde de fer (+ un peu d'alumine)	1,15
Acide silicique	52,63
„ phosphorique	7,87
„ sulfurique	5,57
	98,85

MM. Ch. Contejean et A. Guitteau ont montré [1]) que, chez les espèces salines, le sel se trouve en plus grande quantité dans les parties inférieures de la plante que dans les parties supérieures. Pour savoir s'il en était de même du *Phragmites*, j'en partageai quelques pieds en deux moitiés, dans chacune desquelles je dosai le sodium séparément.

100 parties de cendre du *Phragmites* de l'eau saumâtre contenant 30% d'eau de mer, près de Velzen, donnèrent dans la racine et les parties inférieures: 19,5 Na; dans les parties supérieures: 5,89 Na.

On voit que l'observation faite par les deux savants français trouve ici une confirmation éclatante.

100 parties de cendre d'un *Phragmites* croissant sur le remblai du chemin de fer près de Weesp, donnèrent dans la racine et les parties inférieures: 4,39 Na; dans les parties supérieures: 2,80 Na.

Ici encore, la règle se vérifie, bien que la différence soit moins considérable.

Si l'on examine de plus près les résultats des analyses, on reconnaît que le *Phragmites* qui s'est développé dans l'eau saumâtre

---

[1]) *Compt. rend.*, t. LXXXVI, p. 1151.

renferme une énorme proportion des éléments de l'eau de mer: le sodium s'y élève à 10,86, le chlore à 13,39. Cela donne 22,07 de chlorure de sodium, et il reste encore 2,18 % de sodium, qui existent à l'état de soude dans les cendres. On peut en conclure que, si la plus grande partie du Na Cl paraît se trouver dans la plante comme simple résultat de l'absorption d'eau de mer, une certaine proportion de soude doit pourtant y être regardée comme partie intégrante nécessaire. Cette conclusion gagne encore en vraisemblance quand on considère l'analyse de la seconde plante, qui ne contient que 0,27 pour cent de sodium; car les *Phragmites* récoltés dans le fossé d'eau douce étaient de petits exemplaires, dont la hauteur ne dépassait guère un mètre, tandis que dans le canal maritime les pieds atteignent 3 mètres et croissent serrés les uns contre les autres.

Les échantillons qui croissaient sur le remblai du chemin de fer près de Weesp, à sec par conséquent, étaient au contraire grands et vigoureux, et contenaient aussi une proportion notable de sodium.

Il est démontré, par ce qui précède, que l'*Arundo Phragmites* est une plante saline, qui non-seulement peut vivre dans une eau contenant 30 % d'eau de mer, mais au développement de laquelle cette eau saumâtre est même plus favorable que l'eau douce. Il n'est pas impossible que le *Phragmites* soit capable de supporter, sans inconvénient, un degré encore plus élevé de salure; j'estime toutefois que la proportion d'eau de mer ne devra pas dépasser beaucoup les 30 %, vu que jusqu'ici je n'ai pas trouvé la plante dans une eau plus salée.

Ces faits constatés, la formation de la tourbe zélandaise apparaît dans un jour notablement modifié. Il est très probable que le *Phragmites* a formé en Zélande des forêts aussi compactes et infiniment plus étendues que celles qu'on voit aujourd'hui près de Velzen. Le *Phragmites* est une plante vivace: chaque année il s'élève une nouvelle fôret de jeunes jets de roseaux, chaque année cette forêt meurt et se dépose au fond de l'eau ou du marécage. La masse végétale qui en résulte ne peut disparaître subitement. Elle se mêle avec du limon et passe peu à peu à

l'état de tourbe ou de derri. En Zélande, nous la voyons transformée en matière tourbeuse brune; au bord du canal, près de Velzen, nous la trouvons sous la forme de débris de tiges et de feuilles agglutinés par du limon, qui ont déjà pris une couleur gris-jaunâtre et çà et là une couleur brune, formant ainsi le commencement d'une nouvelle couche de derri, dont la substance ne se distingue en rien de celle de la couche zélandaise.

Naturellement, les autres plantes propres aux eaux saumâtres ne sont pas exclues: elles peuvent avoir participé à la formation de la tourbe; mais quand il s'agit de plantes molles et succulentes, telles que l'*Aster tripolium* par exemple, elles ne laissent pas de débris reconnaissables.

Quant aux circonstances dans lesquelles la couche tourbeuse a dû se former, il est clair que, à l'époque où l'atterrissement n'était pas assez avancé pour que les bancs alluviens s'élevassent au-dessus des basses eaux, l'eau de mer trouvait un libre accès et par suite dominait tellement qu'une végétation de roseaux n'était pas encore possible. Mais, avec le temps, l'accumulation de sable devint assez grande pour qu'une chaîne de dunes commençât à se former et pour que les îles cessassent d'être couvertes par les basses eaux; ces dunes opposaient à la mer une barrière coupée seulement par les embouchures des fleuves, et celles-ci étaient assez étroites pour ne laisser pénétrer que la quantité d'eau de mer pouvant donner lieu à une eau saumâtre à 30 pour cent. De ce moment, la végétation de roseaux put s'établir sur les îles.

Il n'est pas nécessaire d'admettre que la surface de ces îles fût à un niveau supérieur à AP; une faible hauteur au-dessus des basses eaux, c'est tout ce qu'il fallait. Cette remarque a de l'importance, en ce qu'elle permet d'expliquer la position actuelle de la couche à l'aide d'un affaissement postérieur peu considérable.

La végétation des roseaux dura aussi longtemps que l'eau saumâtre contint la proportion de sel favorable, et elle s'étendait sur toute l'aire qui était soumise à l'inondation des fleuves sous l'influence des marées. Le mouvement de l'eau, lors de l'inondation,

ne nuit pas aux roseaux, car aujourd'hui encore on voit ces plantes croître avec profusion dans les canaux à eau courante.

Les roseaux cessèrent d'occuper le sol dès que les embouchures des fleuves se furent élargies de manière à laisser pénétrer assez d'eau de mer pour que la salure atteignît le degré actuel, qui est de 50 à 100 pour cent (voir mon Mémoire: *Sur la salure des eaux de la Zélande*, *Arch. néerl.*, t. IX, p. 433).

Un pareil élargissement peut avoir été le résultat d'une seule irruption violente de la mer, phénomène qui s'est produit à différentes reprises dans les temps postérieurs.

A partir de ce moment, l'inondation périodique amena une eau riche en sels, dans laquelle les roseaux ne pouvaient croître, et la couche de débris végétaux fut successivement recouverte de nouvelles alluvions marines, jusqu'à l'époque où eut lieu l'endiguement des îles. L'affaissement des couches, qui du reste est généralement peu considérable, a été expliqué par moi, ailleurs, d'une manière satisfaisante.

Dans ce qui précède, il est rendu compte sans aucune hypothèse, et à l'aide des seuls phénomènes qui se passent encore aujourd'hui, de la formation de la tourbe zélandaise.

Voyons maintenant à quelles conséquences conduit la supposition que les plantes, qui ont fourni les matériaux de cette couche, auraient vécu dans l'eau douce.

On peut, en premier lieu, admettre que la côte, à cette époque, s'étendait beaucoup plus loin vers l'ouest, de sorte que l'eau de la mer ne pouvait pénétrer jusqu'aux îles actuelles. Aujourd'hui, le flux se fait sentir dans les terres jusqu'à huit lieues de distance. Supposons, toutefois, que la côte ait seulement été plus avancée de quatre lieues vers l'ouest; les roseaux qui ont donné naissance à notre couche de tourbe auront alors crû à une distance d'au moins quatre lieues du rivage. Si une aussi grande masse de terre a existé à l'ouest de la côte actuelle, elle doit, postérieurement à l'époque de la formation de la tourbe, ou bien avoir été emportée par la mer, ou bien s'être affaissée au-dessous du niveau des eaux. La première hypothèse n'est pas

admissible, car c'est un fait qu'après la formation de la tourbe il y a eu *alluvion* de sédiments marins, lesquels recouvrent la couche de tourbe sur une hauteur de 1 à 4 mètres. Or, le dépôt d'une épaisse couche de sable et d'argile et l'enlèvement d'une bande de terre de plusieurs lieues de large, en un lieu où la mer a aujourd'hui une profondeur d'environ 40 mètres, sont deux phénomènes qui ne peuvent se concilier. La disparition de cette bande de terre ne peut s'expliquer non plus par un affaissement du sol, car dans cette hypothèse le terrain alluvien, qui renferme la couche de tourbe, aurait dû participer au mouvement de descente. Mais l'alluvium se trouve, en moyenne, *au niveau de AP et est un produit des marées;* là où l'alluvium est situé plus bas que les basses eaux, il y a eu affaissement local; là où il s'élève au-dessus des hautes eaux, c'est par suite d'accumulations dues à l'action des fortes marées ou à celle du vent. Quant à un soulèvement ou un affaissement général de l'alluvium, rien ne l'indique en Zélande.

L'existence d'une bande de terre de 4 lieues de large, que la mer aurait engloutie d'une manière ou de l'autre, doit donc être regardée comme une chimère, à moins d'admettre que l'océan ait éprouvé deux fois un changement très considérable de niveau dans le temps relativement court qui a dû se passer depuis la formation de la tourbe. Cette hypothèse serait toutefois beaucoup plus incompréhensible que le mode de production même de la couche tourbeuse, et il faudrait imaginer de nouvelles hypothèses pour expliquer de pareils changements de niveau dans un aussi court espace de temps. Or le recours à des hypothèses auxiliaires, destinées à étayer une première hypothèse, a toujours été regardé par les philosophes comme une preuve de la fausseté de celle-ci.

Il faut encore ajouter que, si les marées ne pouvaient pas pénétrer jusqu'à l'aire de la couche de tourbe, la formation de celle-ci a dû se faire dans un lac d'eau douce. Mais un lac, dans lequel se jettent des rivières, n'a jamais un fond horizontal: à partir des points où débouchent les cours d'eau, son fond doit

s'abaisser de plus en plus, ce qui n'est nullement le cas de notre couche tourbeuse. Un fait qui n'est guère favorable non plus à l'existence d'un lac d'eau douce, c'est que, dès l'époque diluviale, ainsi que je l'ai montré ailleurs, les rivières avaient creusé leurs lits actuels; or un pareil travail est difficile à concevoir dans un lac où n'agissent ni le flux ni le reflux.

En second lieu, on peut essayer d'expliquer la production de la tourbe dans l'eau douce en disant: Il s'est formé, le long de la côte, des *wadden* ou lagunes, qui ont été remplies d'eau douce par les rivières, tandis que celles-ci se jetaient dans la mer en des points éloignés de plusieurs lieues, au nord ou au sud, des embouchures actuelles.

Il faut admettre, en ce cas, que les rivières se recourbaient à angle droit à leur entrée dans ces *wadden*, et qu'elles y coulaient sur une longueur de plusieurs lieues parallèlement à la côte, avant de se jeter dans la mer: autrement, on retombe de nouveau dans la première hypothèse, à savoir, que les embouchures se trouvaient à une très grande distance de la côte actuelle. Nulle part sur la terre, toutefois, on ne rencontre d'exemples de semblables rivières. Si, au contraire, les *wadden* étaient en communication avec la mer en face des embouchures actuelles des rivières, la marée pouvait y pénétrer et l'eau de mer atteindre la couche tourbeuse.

En regardant la tourbe de la Zélande comme formée dans l'eau douce, on se trouve donc engagé dans une série d'impossibilités, auxquelles il n'y a d'autre issue que le rejet de l'hypothèse en question.

La conclusion de ce qui précède, c'est que, outre les deux espèces connues de tourbières, les hautes et les basses, il en existe une troisième, celle des *tourbières d'eau saumâtre.* Celle-ci n'a encore été constatée, autant que la chose était possible, qu'en Zélande, mais très probablement on la trouvera aussi ailleurs. On devra donc renoncer à voir toujours, dans la seule présence de la tourbe, la preuve qu'il s'agit d'une formation d'eau douce; de graves erreurs seront ainsi évitées.

UTRECHT, Oct. 1878.

SUR LA DÉCOMPOSITION

DU

CHLORURE DE CALCIUM PAR L'EAU,

PAR

H. C. DIBBITS.

Dans une occasion antérieure [1]) j'avais trouvé que, lorsqu'on évapore par ébullition une solution aqueuse neutre de chlorure de calcium, les premières traces sensibles d'acide chlorhydrique se dégagent au moment où le point d'ébullition est monté à 148° et où la composition est devenue à peu près $CaCl_2 + 4H_2O$. Le début de la décomposition avait été indiqué par la réaction de l'acide chlorhydrique. Les expériences suivantes montreront que cette décomposition commence déjà à une température un peu plus basse, et qu'elle ne dépend pas du rapport entre $CaCl_2$ et H_2O, mais uniquement de la température.

Le chlorure de calcium cristallisé, qui a servi à ces expériences, avait été préparé de la manière mentionnée précédemment [2]). Il était parfaitement neutre aux réactifs colorés (voir plus loin, p. 480). Vu l'impossibilité d'obtenir les cristaux à l'état entièrement sec, j'exécutais avant chaque expérience, sur une partie

---

[1]) *Maandblad v. natuurwetenschappen*, III, p. 17.

[2]) *Ibid.*

du sel employé, le dosage volumétrique du chlore, au moyen d'une solution argentique au dixième du titre normal. Le résultat de ce dosage faisait connaître la proportion de $Ca\,Cl_2 + 6\,H_2\,O$, et par suite la proportion d'eau hygroscopique. Cette dernière s'élevait constamment à 1—1,5 % du poids du sel employé. Les poids donnés ci-après ont subi la correction qui en résultait.

J'ai déjà montré antérieurement [1]), que le chlorure de calcium cristallisé perd à la température ordinaire, dans l'air sec, 5 molécules d'eau de cristallisation, tout en restant complètement neutre.

Pour déterminer l'influence de la chaleur, le sel fut chauffé, en premier lieu, au bain-marie dans un courant d'air sec. L'air, chassé d'un gazomètre avec une vitesse sensiblement constante, (d'environ 10 litres par heure), était purifié et séché par son passage à travers un tube contenant de la chaux-sodée et deux tubes contenant de l'acide sulfurique. Le sel, qui se trouvait dans un tube en U, était pesé de temps en temps, avec toutes les précautions que j'ai indiquées à propos du chlorure du magnésium (*Maandblad*, VII, p. 29).

I. A 75°—80°, 2gr,391 de chlorure de calcium cristallisé perdirent dans un courant d'air sec:

---

[1]) *Maandblad v. natuurwetenschappen*, VI, p. 134. J'avais indiqué, à cette occasion, que la 5e molécule d'eau ne se dégage qu'au-dessus de 10°. J'ai reconnu, depuis, que cela est inexact. Deux portions de sel cristallisé, pesant 2gr,502 et 2gr,551, furent conservées pendant 6 mois (1 nov.—1 mai), chacune séparément, dans un exsiccateur sur l'acide sulfurique; les deux exsiccateurs étaient placés dans une cave dont la température varia de 3 à 10 degrés. Au bout de 30 jours, la diminution de poids (respectivement 32,86 et 32,95 %) correspondait à la perte de $4\,H_2\,O$, et dans les 4—6 jours suivants le poids ne diminua plus. L'acide sulfurique fut alors renouvelé. Après un intervalle de 5 mois, pendant lequel les exsiccateurs ne furent pas ouverts, la diminution de poids était montée respectivement à 41,04 et 41,20 % (calculée pour la perte de $5\,H_2\,O$: 41,11 %). Même à 10°, ou au-dessous, le sel cristallisé perd donc 5 molécules d'eau.

Si, antérieurement, la perte observée au-dessous de 10° avait été moindre, cela tenait probablement à ce que l'acide sulfurique de l'exsiccateur avait déjà absorbé un peu d'eau, et à ce que, par conséquent, l'air n'était pas *entièrement* sec.

en 1 heure . . .	13,68 %	en 60 heures. . .	45,28 %
„ 5 heures. . .	19,52 „	„ 80 „ . . .	47,88 „
„ 10 „ . . .	24,24 „	„ 90 „ . . .	48,93 „
„ 20 „ . . .	32,68 „	„ 100 „ . . .	49,37 „
„ 40 „ . . .	41,93 „	„ 120 „ . . .	49,37 „
		Calculé pour $6 H_2 O$ . .	49,33 „

Du sel ainsi séché, 0gr,2659 exigèrent pour la précipitation du chlore:

0gr,5155 argent = 0gr,1694 chlore = 63,71 % Cl.
Calculé pour $Ca Cl_2$ . . . 63,94 „ „

Le sel était donc devenu tout à fait anhydre. Il donnait avec l'eau une solution parfaitement neutre.

II. A 100°, 2gr,577 de chlorure de calcium cristallisé perdirent dans un courant d'air sec:

en 5 heures. . .	27,16 %	en 20 heures . .	46,39 %
„ 10 „ . . .	36,77 „	„ 25 „ . . .	48,55 „
„ 15 „ . . .	43,01 „	„ 30 „ . . .	49,26 „
		Calculé pour $6 H_2 O$ . . .	49,33 „

0gr,2471 du sel séché servirent au dosage du chlore:

trouvé. . . . . 63,74 % Cl
calculé pour $Ca Cl_2$ . . 63,94 „ „

Le reste donnait avec l'eau une solution parfaitement neutre.

III. L'expérience à 100° fut répétée sur 5gr,462 de sel cristallisé. Au bout de 45 heures, la perte de poids était de 49,40 %. Le sel était donc devenu complètement anhydre. Tout le sel séché fut dissous dans l'eau et donna de nouveau un liquide parfaitement neutre.

Dans toutes ces expériences, la neutralité des solutions était essayée au moyen de l'acide rosolique. Lorsque le liquide, coloré en rouge clair par cet agent, devenait incolore après l'addition de *une* goutte d'acide chlorhydrique, contenant 0,1 milligr. H Cl, la solution est dite *parfaitement neutre*. Le sel avait alors certainement perdu *moins de* 0,1 milligr. H Cl, et contenait par conséquent *moins de* 0,077 milligr. Ca O libre. Dans la dernière des expériences citées, le sel avait donc perdu *moins de* 0,002 % H Cl.

On s'assurait, de la même manière, de la neutralité de l'eau servant à dissoudre le sel.

Le chlorure de calcium cristallisé abandonne donc, dans l'air sec à 100°, et même déjà à 80°, *toute son eau de cristallisation, sans perdre une trace sensible d'acide chlorhydrique.*

Dans les expériences suivantes, 5—5,5 grammes de chlorure de calcium cristallisé, contenus dans une capsule de platine, furent chauffés dans une étuve à air. Pour éviter l'action nuisible que les produits azotés et sulfurés de la combustion du gaz d'éclairage auraient pu exercer sur le sel, l'étuve était chauffée à l'aide d'une lampe à esprit-de-vin. La boule du thermomètre se trouvait, dans la capsule, aussi près que possible de la surface du sel. L'application de la chaleur était continuée jusqu'à ce que le sel fût devenu — comme l'apprenait la perte de poids — complètement anhydre. Le sel était alors dissous dans l'eau, et la solution, colorée par l'acide rosolique comme indicateur, était titrée par de l'acide chlorhydrique dont 1 goutte contenait 0,1 milligr. H Cl. Voici les résultats obtenus:

5—5,5 gr. $CaCl_2 + 6 H_2 O$.

	Durée de l'échauffement.	Température.	Perte de poids.	H Cl échappé.
IV	8 heures	125°—130°	49,2 %	*moins de* 0,1 milligr.
V	4 „	135°—140°	49,1 „	0,15 mgr. = 0,003 %
VI	4 „	145°—150°	49,3 „	0,45 „ = 0,009 „
VII	4 „	155°—160° [1])	49,4 „	0,9 „ = 0,018 „

Finalement, 5 grammes de chlorure de calcium cristallisé furent

[1]) Dans cette expérience, le sel avait d'abord été chauffé ½ heure à environ 120°. Après 1 h. ½ d'exposition à 155°—160°, il était déjà devenu anhydre. Je laissai alors pendant 20 heures le sel reprendre de l'eau dans l'air humide à la température ordinaire, puis je le chauffai de nouveau à 160°; cette opération fut répétée encore une fois. En somme, le sel était resté 4 heures à 155°—160°.

La formation de carbonate de chaux par l'acide carbonique de la flamme ne put être constatée dans ces expériences. En ajoutant un excès d'acide chlorhydrique titré, faisant bouillir et titrant en retour par l'ammoniaque, on trouvait toujours la même proportion de Ca O.

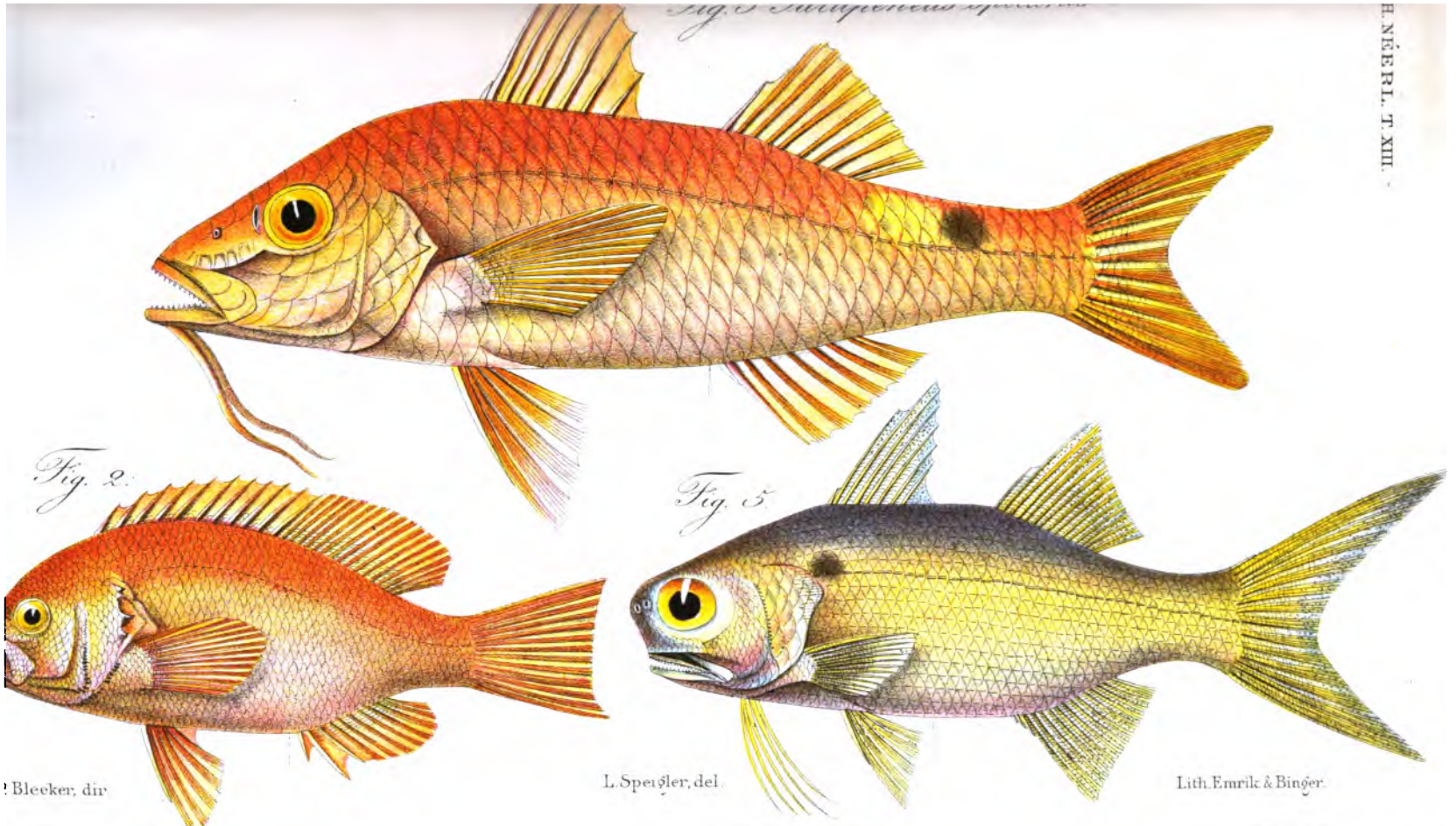
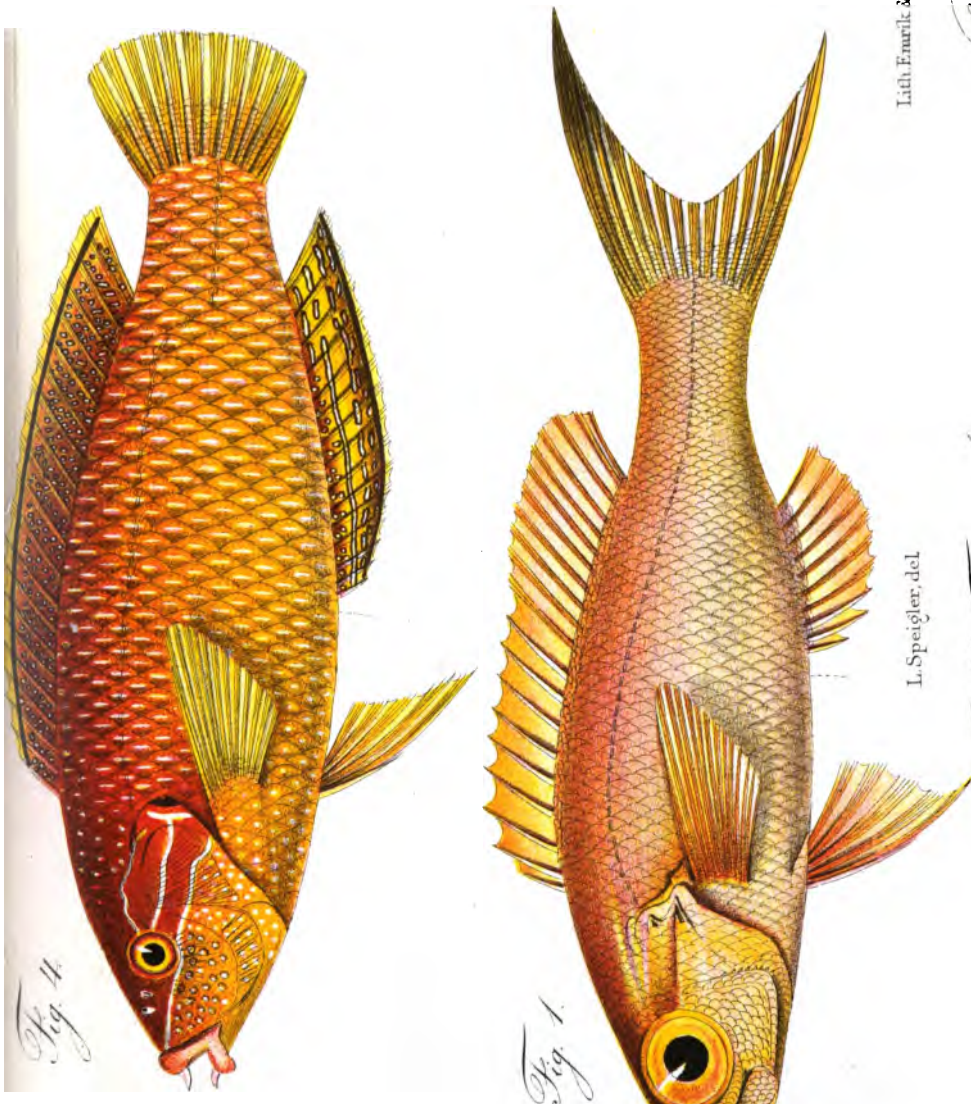


Fig. 2. Pseudanthias hypselosoma Blkr. Fig. 5. Trichidion microstoma Blkr.

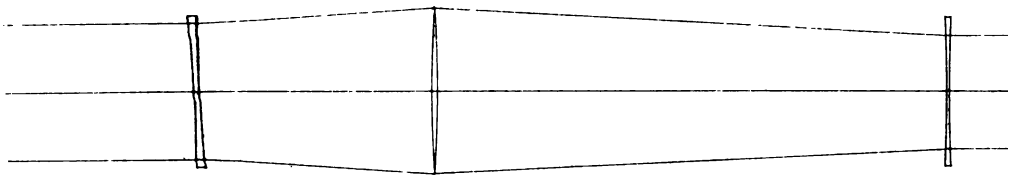


Lith. Emrik & Binger.

L. Speigler, del.

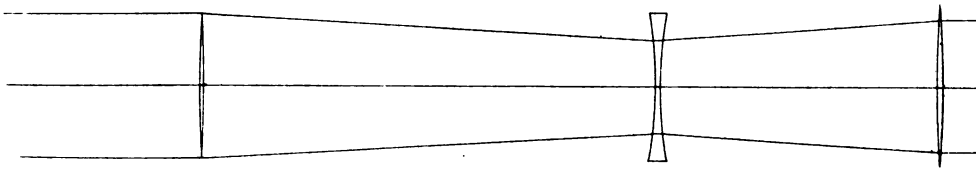
P. Bleeker, dir.

Fig. A. $a = 100$ m m, $F = 23000$ m.m., $n = 3$.



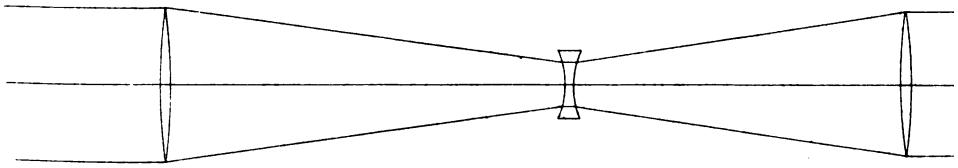
Première Solution $\varphi_0 = -298$, $\varphi_1 = +164$, $\varphi_2 = -258$ m m.

Fig. B. $e = 30$ $a - e = 70$ m m.



Deuxième Solution $\varphi_0 = +176$, $\varphi_1 = -57$, $\varphi_2 = +152$ m m.

Fig. C. $e = 62$ $a - e = 38$ m m.



Troisième Solution $\varphi_0 = 77$, $\varphi_1 = -11$, $\varphi_2 = 67$ m m.

$e = 55$ $a - e = 45$ m m.

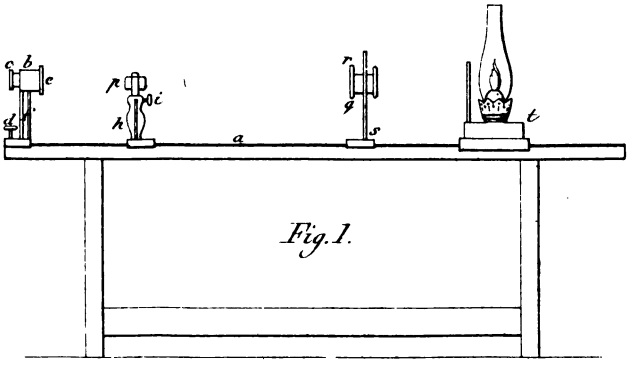


Fig. 1.

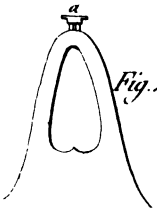


Fig. 2.

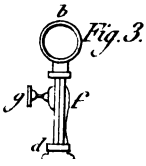


Fig. 3.

Fig. 4.

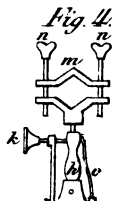
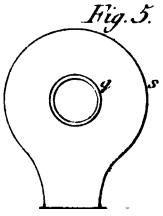


Fig. 5.



Lith.